2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が

$$a_1 = 2,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n + 2b_n,\ \ b_{n+1} = -2a_n + 2b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき, 次の問いに答えよ.

(1) $c_n = a_n + b_n$ とおくとき, 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(13 岩手大 工 2)

(1) $c_n = 4^n$
(2) $a_n = n \cdot 2^{2n-1}$
(3) $\dfrac{2(3n-1) \cdot 4^n + 2}{9}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるような実数 k の値を求めると，$k = 1$ (重解) が得られます．したがって，$\{a_n + b_n\}$ を考えることになります．これが (1) の誘導です．
(3) は $\sum$(等差)(等比) タイプの和の計算です．

【解答】

$$a_{n+1} = 6a_n + 2b_n \qquad \cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = -2a_n + 2b_n \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①，②の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 4(a_n + b_n)$$

$c_n = a_n + b_n$ とおくと

$$c_{n+1} = 4c_n$$

数列 $\{c_n\}$ は，初項が $c_1 = a_1 + b_1 = 2 + 2 = 4$，公比が 4 の等比数列であるから

$$c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = \boldsymbol{4^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 誘導にのって $a_n + b_n$ の関係式をつくる．

(2) (1) の結果より

$$a_n + b_n = 4^n \qquad \therefore \quad b_n = 4^n - a_n$$

① に代入して b_n を消去すると

$$a_{n+1} = 6a_n + 2(4^n - a_n) = 4a_n + 2 \cdot 4^n$$

⟵ $a_{n+1} = pa_n +$ (指数) タイプの 2 項間漸化式です．

両辺を 4^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{2}$$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{4^n}\right\}$ は，初項が $d_1 = \dfrac{a_1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$，公差が $\dfrac{1}{2}$ の等差数列である．

$$\frac{a_n}{4^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{n \cdot 4^n}{2} = \boldsymbol{n \cdot 2^{2n-1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n$ とおくと

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^5 + \cdots + n \cdot 2^{2n-1}$$

$$4S_n = \qquad 1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^5 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{2n-1} + n \cdot 2^{2n+1}$$

辺々をひくと

⟵ 「公比倍」して，「ひく」．

$$\begin{aligned} -3S_n &= 2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n-1} - n2^{2n+1} \\ &= \frac{2(4^n - 1)}{4 - 1} - n \cdot 2^{2n+1} \\ &= \frac{2(4^n - 1) - 6n \cdot 4^n}{3} \\ &= \frac{-(6n-2)4^n - 2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S_n = \boldsymbol{\frac{2(3n-1) \cdot 4^n + 2}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$