次のように定められた数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 9, \quad a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えなさい．

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$b_{n+1} = \boxed{29} b_n + \boxed{30}$ である．

(2) $c_n = b_n + 9$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\boxed{31}\boxed{32}$，公比 $\boxed{33}$ の等比数列である．

(3) $a_n = \boxed{34}^{n+1} - \boxed{35}^{n+2}$

(13 日本大 生物資源 (獣医) 4)

29	**30**	**3132**	**33**	**34**	**35**
2	9	12	2	6	3

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

$a_{n+1} = pa_n +$ (指数) タイプの 2 項間漸化式です．

まずは，誘導にのりながら一般項を求めましょう．次は，誘導がなくても解けるようにもしたいものです．解法もいくつか考えてみましょう．

【解答】

$$a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+3} \quad \cdots\cdots ①$$

← $a_{n+1} = pa_n +$ (指数) タイプの 2 項間漸化式です．
チェクリピ (344)(345)

(1) ①の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n}{3^n} + 9$$

$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$b_{n+1} = \underset{29}{\boxed{\mathbf{2}}}\,b_n + \underset{30}{\boxed{\mathbf{9}}} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

← $a_{n+1} = pa_n + q$ タイプの 2 項間漸化式に変形した．

(2) $$\beta = 2\beta + 9 \quad \cdots\cdots ③$$

③の解は $\beta = -9$ であり，②，③の辺々を引くことにより，②は

$$b_{n+1} + 9 = 2(b_n + 9)$$

と変形される．$c_n = b_n + 9$ とおくと

$$c_{n+1} = 2c_n$$

← 等比化された．

であり，数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = b_1 + 9 = \dfrac{a_1}{3} + 9 = \dfrac{9}{3} + 9 = \underset{3132}{\boxed{\mathbf{12}}}$，

公比 $\underset{33}{\boxed{\mathbf{2}}}$ の等比数列である． ……(答)

(3) (2) の結果より

$$c_n = 12 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n+1}$$

$$\therefore \quad b_n = c_n - 9 = 3 \cdot 2^{n+1} - 9$$

であるから

$$a_n = 3^n b_n = \underset{34}{\boxed{\mathbf{6}}}^{\,n+1} - \underset{35}{\boxed{\mathbf{3}}}^{\,n+2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

● (1)，(2) の誘導を無視して，a_n を求める別解を示しておこう．

別解 1° 両辺を 6^{n+1} で割る．

$$\frac{a_{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{a_n}{6^n} + \frac{9}{2^{n+1}}$$

← 階差型の数列に変形した．

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{6^n} &= \frac{a_1}{6} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{9}{2^{k+1}} \\
&= \frac{9}{6} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\
&= 6 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_n = 6^{n+1} - 3^{n+2}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって $a_n = 6^{n+1} - 3^{n+2}$ $(n \geqq 1)$

← $n = 1$ のときの確認も忘れない．

別解 2° $\alpha(n+1) = 6\alpha(n) + 3^{n+3}$ …… ①$'$ を満たす n の関数 $\alpha(n)$ をみつける．

← この解法も是非身につけたい．

$\alpha(n) = p3^n$ とおくと，①$'$ は

$$p3^{n+1} = 6 \cdot p3^n + 3^{n+3}$$

$$p = 2p + 9 \qquad \therefore \quad p = -9$$

①，①$'$ の辺々を引くことにより，①は

$$a_{n+1} + 9 \cdot 3^{n+1} = 6(a_n + 9 \cdot 3^n)$$

← 等比化された．

と変形される．数列 $\{a_n + 9 \cdot 3^n\}$ は初項 $a_1+9\cdot 3 = 9+27 = 36$，公比 6 の等比数列であるから

$$a_n + 9 \cdot 3^n = 36 \cdot 6^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 6^{n+1} - 3^{n+2}$$