次の $\boxed{}$ にあてはまる答を解答欄 (省略) に記入しなさい．

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=0$ と第 2 項 $a_2=-1$ の値をとり，漸化式

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=3^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす数列であるとする．$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義された b_n を使って書き直した数列 $\{b_n\}$ に注目すると，その初項は $b_1=\boxed{\mathbf{a}}$ となり，数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式は $\boxed{\mathbf{b}}$ となる．続いて，$c_n=\dfrac{b_n}{3^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義された c_n を使って書き直した数列 $\{c_n\}$ に注目すると，その初項は $c_1=\boxed{\mathbf{c}}$ となり，数列 $\{c_n\}$ が満たす漸化式は $\boxed{\mathbf{d}}$ となる．$\mathbf{d}$ で求めた漸化式を満たす数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めると，$c_n=\boxed{\mathbf{e}}$ である．したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は $b_n=\boxed{\mathbf{f}}$ と表され，最終的に数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は $a_n=\boxed{\mathbf{g}}$ と求められる．　(13 明治薬大 4)

a	**b**	**c**	**d**
-1	$b_{n+1}=2b_n+3^{n+1}$	$-\dfrac{1}{3}$	$c_{n+1}=\dfrac{2}{3}c_n+1$

e	**f**	**g**
$3-5\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$	$3^{n+1}-5\cdot 2^n$	$\dfrac{3^{n+1}-5\cdot 2^{n+1}+11}{2}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

3 項間漸化式の変形型になっています．まずは誘導にのりながら解きやすい漸化式に直していきましょう．

【解答】

$b_1 = a_2 - a_1 = \underset{\text{a}}{\boxed{\mathbf{-1}}}$ であり，　……(答)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= (3a_{n+1} - 2a_n + 3^{n+1}) - a_{n+1} \\ &= 2(a_{n+1} - a_n) + 3^{n+1} \\ &= 2b_n + 3^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underset{\text{b}}{\boxed{\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n + 3^{n+1}}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 置き換えにより，3 項間漸化式が 2 項間漸化式になった．

続いて，両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b_n}{3^n} + 1$$

$c_n = \dfrac{b_n}{3^n}$ とおくと

$$c_1 = \frac{b_1}{3} = \underset{\text{c}}{\boxed{\boldsymbol{-\frac{1}{3}}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，数列 $\{c_n\}$ は漸化式

$$\underset{\text{d}}{\boxed{\boldsymbol{c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + 1}}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 2 項間漸化式の基本形

を満たす．$\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha + 1$ …… ② の解は $\alpha = 3$ であり，①，②の辺々をひくと，①は

$$c_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(c_n - 3)$$

と変形される．数列 $\{c_n - 3\}$ は初項 $c_1 - 3 = -\dfrac{1}{3} - 3 = -\dfrac{10}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列である．

$$c_n - 3 = -\frac{10}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -5\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore \quad \underset{\text{e}}{\boxed{\boldsymbol{c_n = 3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = 3^n c_n = \underset{\text{f}}{\boxed{\boldsymbol{3^{n+1} - 5 \cdot 2^n}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．これより $n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1} - 5\cdot 2^k) \\
&= 0 + \frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1} - \frac{10(2^{n-1}-1)}{2-1} \\
&= \frac{3^{n+1}-9}{2} - 5\cdot 2^n + 10 \\
&= \frac{3^{n+1} - 5\cdot 2^{n+1} + 11}{2}
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

←― $n=1$ のときの成立も確認する．

よって $\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{3^{n+1} - 5\cdot 2^{n+1} + 11}{2}}}$ $(n \geqq 1)$

g

……(答)

- 3 項間漸化式の基本形に持ち込んで一般項を求めてみよう．

$$a_1 = 0,\ a_2 = -1$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3^{n+1} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\alpha(n+2) - 3\alpha(n+1) + 2\alpha(n) = 3^{n+1} \quad \cdots\cdots ④$$

←― 左辺の 3^{n+1} の処理を考える．

まず，④を満たす $\alpha(n)$ を求める．$\alpha(n) = p3^n$ とおくと

$$④ \iff p3^{n+2} - 3\cdot 3^{n+1}p + 2\cdot 3^n = 3^{n+1}$$

両辺を 3^n で割ると

$$9p - 9p + 2p = 3 \qquad \therefore\quad p = \frac{3}{2}$$

これより③，④の辺々をひくと，③は

$$\left(a_{n+2} - \frac{3}{2}\cdot 3^{n+2}\right) - 3\left(a_{n+1} - \frac{3}{2}\cdot 3^{n+1}\right) + 2\left(a_n - \frac{3}{2}\cdot 3^n\right) = 0$$

と変形される．$A_n = a_n - \frac{3}{2}\cdot 3^n$ とおくと

$$A_{n+2} - 3A_{n+1} + 2A_n = 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

←― 3 項間漸化式の基本形

であり

$$A_1 = 0 - \frac{3}{2}\cdot 3 = -\frac{9}{2},\quad A_2 = -1 - \frac{3}{2}\cdot 3^2 = -\frac{29}{2}$$

である．$t^2 - 3t + 2 = 0$ の解 $t = 1,\ 2$ を利用すると，⑤は

$$A_{n+2} - A_{n+1} = 2(A_{n+1} - A_n) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} = A_{n+1} - 2A_n \quad \cdots\cdots ⑦$$

←― 2 通りの形に変形する．

と 2 通りに変形することができる．

⑥より

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= \left\{-\frac{29}{2} - \left(-\frac{9}{2}\right)\right\}2^{n-1} \\
&= -10\cdot 2^{n-1} = -5\cdot 2^n \quad \cdots\cdots ⑥'
\end{aligned}
$$

⑦より

$$A_{n+1} - 2A_n = -\frac{29}{2} - 2\left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{11}{2} \quad \cdots\cdots ⑦'$$

⑥$'$, ⑦$'$ の辺々をひくと

$$A_n = \frac{11}{2} - 5 \cdot 2^n$$

$$a_n - \frac{3}{2} \cdot 3^n = \frac{11}{2} - 5 \cdot 2^n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{3^{n+1} - 5 \cdot 2^{n+1} + 11}{2}$$

$\longleftarrow$ A_n の一般項が求まった.