自然数 n に対して，有理数 a_n，b_n を $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n = \dfrac{a_n + b_n\sqrt{3}}{2}$ によって定める．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるような実数 k の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(13 昭和薬大 薬 3)

(1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{2}$，　$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

(2) $k = \pm\sqrt{3}$

(3) $a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1) ここでは，無理数における表現の一意性，すなわち

p，q，r，s が有理数で，α が無理数のとき

$$p+q\alpha=r+s\alpha \iff p=r \text{ かつ } q=s$$

であること使います．

(2) (1) で得られた連立漸化式の一般項を求めるため典型的な解法です．この誘導がなくても使えるようにしておきましょう．

【解答】

(1)
$$\frac{a_n+b_n\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

より

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}}{2}&=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\\&=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{a_n+b_n\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1}{2}\,\frac{a_n(1+\sqrt{3})+b_n(\sqrt{3}+3)}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{a_n+3b_n}{2}+\frac{a_n+b_n}{2}\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

← a_{n+1}，b_{n+1} と a_n，b_n の関係式をつくる．

a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} は有理数で，$\sqrt{3}$ は無理数より

← p，q，r，s が有理数で，α が無理数のとき $p+q\alpha=r+s\alpha \iff p=r$ かつ $q=s$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるとき，公比を γ とすると

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=\gamma(a_n+kb_n)=\gamma a_n+\gamma kb_n \quad\cdots\cdots ①$$

← 連立漸化式を等比化する（a_n，b_n を絡めた等比数列をつくる）．
チェクリピ (349)

また，(1) の結果より

$$\begin{aligned}a_{n+1}+kb_{n+1}&=\frac{a_n+3b_n}{2}+k\cdot\frac{a_n+b_n}{2}\\&=\frac{1+k}{2}a_n+\frac{3+k}{2}b_n \quad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$\begin{cases}\gamma=\dfrac{1+k}{2}\\[2mm]\gamma k=\dfrac{3+k}{2}\end{cases}$$

γ を消去して

$$(1+k)k=3+k \qquad \therefore\quad \boldsymbol{k=\pm\sqrt{3}} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

← 2 通りの等比数列をつくることができる．

(3) $a_1=1$，$b_1=1$ である．(2) の結果を用いると

(i) $k=\sqrt{3}$ のとき

$$a_{n+1}+\sqrt{3}b_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(a_n+\sqrt{3}b_n)$$

数列 $\left\{a_n+\sqrt{3}b_n\right\}$ は，初項 $a_1+\sqrt{3}b_1=1+\sqrt{3}$，公比

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n+\sqrt{3}b_n=(1+\sqrt{3})\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$
$$=2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n} \quad \cdots\cdots ③$$

(ii) $k=-\sqrt{3}$ のとき

$$a_{n+1}-\sqrt{3}b_{n+1}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(a_n-\sqrt{3}b_n)$$

数列 $\left\{a_n-\sqrt{3}b_n\right\}$ は，初項 $a_1-\sqrt{3}b_1=1-\sqrt{3}$，公比 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-\sqrt{3}b_n=(1-\sqrt{3})\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$
$$=2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n} \quad \cdots\cdots ④$$

③，④の辺々を加えて，b_n を消去すると

←― ③，④を連立して a_n を求める．

$$2a_n=2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n}+2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n}} \quad \cdots\cdots(答)$$