(1) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5a_n - 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $b_n = \dfrac{n!}{a_n - 1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める． $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ を n を用いて表せ.

(3) b_n を最小とするような n の値をすべて求めよ．

(13 津田塾大 数学 3)

(1) $a_n = 5^{n-1} + 1$

(2) $\dfrac{n_{n+1}}{b_n} = \dfrac{n+1}{5}$

(3) $n = 4,\ 5$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

(1) 2 項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ ($p,\ q$ は定数) の一般項を求める基本問題です.

(2) $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ は (3) のための準備問題です.

(3) $b_n>0$ のとき

$$b_n \leqq b_{n+1} \iff \frac{b_{n+1}}{b_n} \geqq 1$$

であり，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ と 1 との大小を調べることにより，$\{a_n\}$ の増減を調べることができます.

【解答】

(1)
$$a_{n+1}=5a_n-4 \quad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha=5\alpha-4 \quad \cdots\cdots ②$$
②の解は $\alpha=1$ であり，①，②の辺々を引くことにより，①は

$$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$$

と変形される．数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=2-1=1$，公比 5 の等比数列であるから

$$a_n-1=1\cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_n=5^{n-1}+1} \quad \cdots\cdots(答)$$

- ①は次のように解くこともできる．
  両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{a_n}{5^n}-\frac{4}{5^{n+1}}$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{5^n}&=\frac{a_1}{5}-4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5^{k+1}}\\ &=\frac{2}{5}-\frac{4}{5^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{5}}\\ &=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}\\ &=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^n\end{aligned}$$

$$a_n=5^{n-1}+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．
よって，　$a_n=5^{n-1}+1\ (n\geqq 1)$

(2) (1) の結果から

$$b_n=\frac{n!}{a_n-1}=\frac{n!}{5^{n-1}},\quad b_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^n}$$

であり

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n}&=\frac{(n+1)!}{5^n}\times\frac{5^{n-1}}{n!}\\ &=\boldsymbol{\frac{n+1}{5}} \quad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

←─ 2 項間漸化式
$a_{n+1}=pa_n+q$
チェクリピ (337)

←─ 階差型の数列に変形した．

←─ 和が定義されるのは $n\geqq 2$ のときである．

←─ $n=1$ のときの確認も忘れない．

←─ これは (3) の準備

(3) すべての自然数 n に対して，$b_n > 0$ であるから

$$b_n \leqq b_{n+1} \iff \frac{b_{n+1}}{b_n} \geqq 1$$

←— $b_n \leqq b_{n+1}$ を $b_{n+1} - b_n \geqq 0$ とするか $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \geqq 1$ とするかに分かれる.

②の結果より

$$\frac{n+1}{5} \geqq 1 \qquad \therefore \quad n \geqq 4$$

等号は $n = 4$ のときのみ成り立つ．したがって

$1 \leqq n \leqq 3$ のとき　$b_n > b_{n+1}$

$n = 4$ のとき　$b_n = b_{n+1}$

$n \geqq 5$ のとき　$b_n < b_{n+1}$

である．これより

$$b_1 > b_2 > b_3 > b_4 = b_5,\ b_5 < b_6 < \cdots$$

であり，b_n を最小とする n の値は $\boldsymbol{n = 4,\ 5}$ である．　……(答)

←— $n = 5$ も忘れない.