数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) a_n を n の式で表せ．

(13 熊本大 教育・医 (保看)4・理・医 (保技) 1)

(1) $a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1$

(2) $a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

S_n と a_n の関係式から S_n を消去すると

$$a_{n+1} = pa_n + (1\text{ 次式})$$

という形の 2 項間漸化式が得られます．この式から，一般項 a_n を求めます．

【解答】

(1)
$$S_n = 2a_n + n^2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるから，② − ① として，①，②の辺々を引くと

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2n + 1$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ を利用して，S_n を消去する．

(2)
$$\alpha(n+1) = 2\alpha(n) - 2n - 1 \quad \cdots\cdots ④$$

を満たす n の 1 次式 $\alpha(n)$ を求める．$\alpha(n) = pn + q$ とおくと

$$p(n+1) + q = 2(pn+q) - 2n - 1$$
$$pn + p + q = (2p-2)n + 2q - 1$$

⟵ ③ − ④ により $a_{n+1} - \alpha(n+1) = 2(a_n - \alpha(n))$ が得られる．チェクリピ (343)

これがすべての自然数 n について成り立つ条件は

$$\begin{cases} p = 2p - 2 \\ p + q = 2q - 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad p = 2,\ q = 3$$

⟵ n についての恒等式である．

したがって，③，④の辺々を引くと，③は

$$a_{n+1} - 2(n+1) - 3 = 2(a_n - 2n - 3)$$

と変形される．①において，$n = 1$ とおくと

⟵ ①より a_1 の値を求める．

$$S_1 = 2a_1 + 1^2$$

$S_1 = a_1$ であり

$$a_1 = 2a_1 + 1 \qquad \therefore \quad a_1 = -1$$

数列 $\{a_n - 2n - 3\}$ は初項 $a_1 - 2 - 3 = -1 - 5 = -6$，公比 2 の等比数列である．

$$a_n - 2n - 3 = -6 \cdot 2^{n-1} = -3 \cdot 2^n$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 漸化式③から一般項 a_n を求める別解を示しておこう．

$$a_1 = -1,$$
$$a_{n+1} = 2a_n - 2n - 1 \quad \cdots\cdots ③$$

別解 1° ③の両辺を 2^{n+1} で割る．

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} - \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

⟵ 階差型の数列に変形した．

$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2^{k+1}} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2^{k+1}}$$

$S_{n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2^{k+1}}$ とおくと

$$S_{n-1}=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S_{n-1}=\qquad\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

2 式の差をとると

$$\frac{1}{2}S_{n-1}=\frac{3}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{n-1}&=\frac{1+2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=\frac{1}{2}+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=\frac{5}{2}-\frac{2n+3}{2^n}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{2^n}&=-\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{2}-\frac{2n+3}{2^n}\right)\\&=-3+\frac{2n+3}{2^n}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n=2n+3-3\cdot 2^n$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

よって $a_n=2n+3-3\cdot 2^n\ (n\geqq 1)$

← $\sum$(等差)(等比) は「公比倍して，ひく」を実行する.

← $n=1$ のときの確認も忘れない.

別解 2°

$$a_{n+1}=2a_n-2n-1 \qquad\cdots\cdots ③$$

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-2(n+1)-1 \qquad\cdots\cdots ③'$$

③′ − ③ として，辺々を引くと

$$a_{n+1}-a_n=2(a_{n+1}-a_n)-2$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=2b_n-2 \qquad\cdots\cdots ⑤$$

である.

$$\beta=2\beta-2 \qquad\cdots\cdots ⑥$$

の解は $\beta=2$ であり，⑤，⑥の辺々を引くことにより，⑤は

$$b_{n+1}-2=2(b_n-2)$$

と変形される.

また，①において，$n=2$ とすると

$$a_1+a_2=2a_2+2^2$$

$$\therefore\quad a_2=a_1-4=-1-4=-5$$

$$\therefore\quad b_1=a_2-a_1=-5-(-1)=-4$$

数列 $\{b_n-2\}$ は初項 $b_1-2=-4-2=-6$，公比 2 の

← $a_{n+1}=pa_n+(1$ 次式$)$ タイプの 2 項間漸化式 チェクリピ (343)

← $b_{n+1}=pb_n+q$ タイプの 2 項間漸化式

等比数列であるから

$$b_n - 2 = -6 \cdot 2^{n-1} = -3 \cdot 2^n$$

$$\therefore \quad b_n = 2 - 3 \cdot 2^n$$

⟵ 階差の一般項が求められた.

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2 - 3 \cdot 2^k) \\ &= -1 + 2(n-1) - 6 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2n + 3 - 6 \cdot 2^{n-1} \\ &= 2n + 3 - 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ.

よって　$a_n = 2n + 3 - 3 \cdot 2^n \ (n \geqq 1)$

⟵ $n = 1$ のときの確認も忘れない.