数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 4$ で定められている．一般項を求めると $a_n = \boxed{\text{セ}}$ である．また，数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + 8$ で定められている．一般項を求めると $b_n = \boxed{\text{ソ}}$ である．

$c_n = a_n + b_n$ とおくとき数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めると $S_n = \boxed{\text{タ}}$ である．

(13 神戸薬大・5)

セ	ソ	タ
$4n-1$	$9\cdot 2^{n-1}-8$	$9\cdot 2^n + 2n^2 - 7n - 9$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

2 項間漸化式の一般項を求める基本問題です．

$$A_{n+1}=pA_n+q \quad (p,\ q \text{ は定数})$$

における $p=1$ のときと $p \fallingdotseq 1$ のときの具体例がそれぞれ与えられえています．

【解答】

$a_{n+1}=a_n+4$ より，$\{a_n\}$ は公差 4 の等差数列である．初項は $a_1=3$ と定められているから，一般項 a_n は

$$a_n=3+4(n-1)=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{4n-1}}}_{セ} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，

$$b_{n+1}=2b_n+8 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha=2\alpha+8 \qquad \cdots\cdots ②$$

②の解は $\alpha=-8$ であり，①，②の辺々を引くことにより，①は

$$b_{n+1}+8=2(b_n+8)$$

と変形される．数列 $\{b_n+8\}$ は，初項 $b_1+8=1+8=9$，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+8=9\cdot 2^{n-1}$$
$$\therefore \quad b_n=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{9\cdot 2^{n-1}-8}}}_{ソ} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．よって，

$$\begin{aligned} c_n&=a_n+b_n=(4n-1)+(9\cdot 2^{n-1}-8)\\ &=9\cdot 2^{n-1}+4n-9 \end{aligned}$$

の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n&=\sum_{k=1}^{n}(9\cdot 2^{k-1}+4k-9)\\ &=9\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{n\{-5+(4n-9)\}}{2}\\ &=9(2^n-1)+n(2n-7)\\ &=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{9\cdot 2^n+2n^2-7n-9}}}_{タ} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

- ①の漸化式を次のようにして解くこともできる．
  両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{8}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^n}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{2^n}&=\frac{b_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-2}}\\ &=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\\ &=\frac{1}{2}+4\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\\ &=\frac{9}{2}-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad b_n=9\cdot 2^{n-1}-8$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．
よって　$b_n=9\cdot 2^{n-1}-8\ (n \geqq 1)$

$\longleftarrow$ $a_{n+1}-a_n=$(一定) より $\{a_n\}$ は等差数列である．

$\longleftarrow$ 2 項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ チェクリピ (337)

$\longleftarrow$ ①が等比化された．

$\longleftarrow$ $\sum$(1 次式) は等差数列の和とみる．

$\longleftarrow$ 階差型の数列に変形する．

$\longleftarrow$ この和が定義されるのは $n-1 \geqq 1$ より，$n \geqq 2$ のときである．

$\longleftarrow$ $n=1$ のときの確認も忘れない．