正四面体 ABCD を考える．点 P は，時刻 0 では頂点 A にあり，1 秒ごとに，今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする．$n$ を 0 以上の整数とし，点 P が $n$ 秒後に A, B, C, D にある確率を，それぞれ $p_n$，$q_n$，$r_n$，$s_n$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 1$ に対し $q_n = r_n = s_n$ となることを数学的帰納法で証明せよ．
(2) $n \geqq 1$ に対し $p_n$，$q_n$ を $p_{n-1}$，$q_{n-1}$ で表せ．ただし，$p_0 = 1$, $q_0 = 0$ とする．
(3) $c_n = p_n - q_n$ とおいて $c_n$ の一般項を求めよ．
(4) $p_n$ の一般項を求めよ．

(13 三重大 医 3)

(1) 略
(2) $p_n = q_{n-1}$，$q_n = \dfrac{1}{3}q_{n-1} + \dfrac{2}{3}q_{n-1}$
(3) $c_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
(4) $p_n = \dfrac{1}{4}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

解答は次のページにあります．

## 【チェック・チェック】

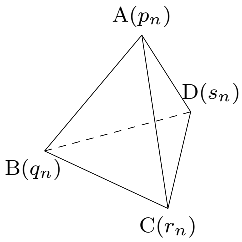
$n-1$ 回目から $n$ 回目への移動の状況を，排反でかつすべてを網羅するように場合分けして連立漸化式をつくります.

(1) 図形の対称性を考えると明らかという気もしますが,「証明せよ」となっています.「数学的帰納法を用いよ」となっているところは親切？
(2) 連立漸化式をつくろうとしています. (1) を利用すれば $r_n$，$s_n$ は直ちに消去できます.
(3) 誘導にのりましょう.
(4) (確率の総和) $= 1$ はつねに成立しています.

---

【解答】

点 P は，1 秒ごとに，今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くから




$$p_n = \frac{1}{3}(q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1}) \quad \cdots\cdots ①$$
$$q_n = \frac{1}{3}(p_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1}) \quad \cdots\cdots ②$$
$$r_n = \frac{1}{3}(p_{n-1} + q_{n-1} + s_{n-1}) \quad \cdots\cdots ③$$
$$s_n = \frac{1}{3}(p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1}) \quad \cdots\cdots ④$$

である.

←― 題意を把握する.

(1) すべての自然数 $n$ $(n \geqq 1)$ に対し

$$q_n = r_n = s_n \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する.

(i) $n = 1$ のとき，②，③，④かつ $p_0 = 1$，$q_0 = r_0 = s_0 = 0$ より

$$q_1 = \frac{1}{3}(1+0+0) = \frac{1}{3}$$
$$r_1 = \frac{1}{3}(1+0+0) = \frac{1}{3}$$
$$s_1 = \frac{1}{3}(1+0+0) = \frac{1}{3}$$

であり，$n = 1$ のとき $(*)$ は成り立つ.

(ii) $n = k$ での成立を仮定すると

←― $q_k = r_k = s_k$ であることを仮定した.

$$q_{k+1} = \frac{1}{3}(p_k + r_k + s_k) = \frac{1}{3}(p_k + 2q_k)$$
$$r_{k+1} = \frac{1}{3}(p_k + q_k + s_k) = \frac{1}{3}(p_k + 2q_k)$$
$$s_{k+1} = \frac{1}{3}(p_k + q_k + r_k) = \frac{1}{3}(p_k + 2q_k)$$

であり，$(*)$ は $n = k+1$ のときも成り立つ.

(i)，(ii) より，すべての自然数 $n$ $(n \geqq 1)$ に対し $(*)$ は成り立つ.
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) ①，②と (1) の結果より，自然数 $n$ $(n \geqq 1)$ に対し

$$\boldsymbol{p_n = q_{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\boldsymbol{q_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}q_{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

←― 連立漸化式

が成り立つ.

(3) (2) より，

$$c_n = p_n - q_n = q_{n-1} - \left(\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}q_{n-1}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}(p_{n-1} - q_{n-1}) = -\frac{1}{3}c_{n-1}$$

であるから，$\{c_n\}$ は初項 $c_0 = p_0 - q_0 = 1 - 0 = 1$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である．

$$c_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad \therefore \quad \boldsymbol{c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) (3) より，

$$p_n - q_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots\cdots ⑤$$

また，P は A，B，C，D のいずれかにあるから

$$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$$

⟵ (確率の総和) $= 1$

(1) の結果とあわせると

$$p_n + 3q_n = 1 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥より $q_n$ を消去すると

$$\boldsymbol{p_n} = \frac{1}{4}\left\{1 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- (3) の誘導を無視するなら，(2) の連立漸化式を 3 項間漸化式に変形して解くこともできる．すなわち，(2) の関係式から $q_{n-1}$，$q_n$ を消去して

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}p_n$$

これは

$$p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n = p_n + \frac{1}{3}p_{n-1}$$
$$p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{3}(p_n - p_{n-1})$$

⟵ $t^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t$ の解 $t = -\frac{1}{3}$，1 を利用して変形した．

と変形される．したがって

$$p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n = p_1 + \frac{1}{3}p_0 = \frac{1}{3}$$
$$p_{n+1} - p_n = (p_1 - p_0)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

⟵ $p_0 = 1$，$p_1 = 0$

辺々の差をとると

$$\frac{4}{3}p_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
$$\therefore \quad p_n = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$