点 P は数直線上を動くものとする．1 個のさいころを投げて，奇数の目が出たときには P は正の向きに 1 だけ進み，偶数の目が出たときには P は正の向きに 2 だけ進む．n を自然数とする．さいころを続けて投げて，出発点から P が進んだ距離が n 以上になったら，そこでさいころを投げるのをやめるものとする．このときに，出発点から P が進んだ距離がちょうど n である確率を a_n とする．また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) b_n，a_n を求めよ．

(13 大阪市大 文系 4)

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$，$a_2 = \dfrac{3}{4}$，$a_3 = \dfrac{5}{8}$

(2) $a_{n+2} = \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{2}a_n$

(3) $b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}b_n$

(4) $b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，$a_n = \dfrac{1}{3}\left\{2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

3 項間漸化式をつくる確率と数列の融合問題です.
P の最後の移動は 1 進むか 2 進むかのいずれかであり，この移動で移動距離が $n+2$ となるのは

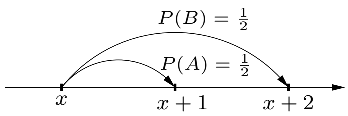
$n+1$ だけ移動した後，+1 の移動をおこなう
n だけ移動した後，+2 の移動をおこなう

のいずれかです.

3 項間漸化式を解くための一般論もありますが，それを避けた誘導がついていますね.

【解答】

1 個のさいころを投げて,「奇数の目が出る」,「偶数の目が出る」という事象をそれぞれ A, B とすると,



⟵ 図を描きながら題意を把握する.

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$$

である.

出発点から P が進んだ距離を x とすると，P が x にあるとき，A が起こると P は $x+1$ に進み，B が起こると P は $x+2$ に進む.

(1) $x=1$ となるのは，A が 1 回起こるときであるから

$$a_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$x=2$ となるのは，A が 2 回起こるか，または，B が 1 回起こるときであるから

$$a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$x=3$ となるのは，A が 3 回起こるか，または，A と B が 1 回ずつ起こるときであるから

$$a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_2\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- $x=3$ となるのは，P が $x=2$ にあって A が起こるか，$x=1$ にあって B が起こるかのいずれかである.

⟵ a_1，a_2 の利用を考える.

$$a_3=a_2\cdot\frac{1}{2}+a_1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

(2) $x=n+2$ となるのは，P が $x=n+1$ にあって A が起こるか，$x=n$ にあって B が起こるかのいずれかである.

⟵ 前から次への状況変化の「すべて」を「排反」な事象でとらえる.

$$a_{n+2}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{2}+a_n\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

⟵ 3 項間漸化式

(3) ①の辺々から a_{n+1} を引くと

⟵ 誘導に従った式変形である.

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) (3) の結果より $\{b_n\}$ は，初項は $b_1=a_2-a_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，公比 $-\frac{1}{2}$ をの等比数列であるから

$$b_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}
\end{aligned}
$$

⟵ $n \geqq 2$ であることに注意.

⟵ 階差を用いて一般項を求める式公式

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

⟵ $n=1$ での成立確認を忘れない.

- ②を a_n で表すと

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \cdots\cdots ②'$$

また，①は次のようにも変形される.

$$a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$$

⟵ $t^2 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ を解くと $t = 1,\ -\frac{1}{2}$

$\left\{a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right\}$ は初項 $a_2 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$ の定数数列であるから

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = 1 \qquad \cdots\cdots ③$$

③ − ②′ より

$$\frac{3}{2}a_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\left(= \frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\right)$$