次の空欄 $\boxed{\text{コ}}$ から $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるもの (数・式など) を解答用紙 (省略) の所定の欄に記入せよ．

A と B を数直線上の異なる 2 点とする．点 P はこの 2 点 A，B のいずれかの上にあり，1 回の操作で次のように動く．

- 点 P が A 上にあるときは，$\dfrac{1}{3}$ の確率で B に移り，$\dfrac{2}{3}$ の確率で A にとどまる．
- 点 P が B 上にあるときは，$\dfrac{1}{4}$ の確率で A に移り，$\dfrac{3}{4}$ の確率で B にとどまる．

操作を 1 度もしていない時点では点 P は A 上にあるとする．操作を n 回おこなった後に点 P が A 上にある確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) $p_1 = \boxed{\text{コ}}$，$p_2 = \boxed{\text{サ}}$ である．

(2) p_{n-1} を用いて p_n を表すと $p_n = \boxed{\text{シ}}$ となる．

(3) 数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n = \boxed{\text{ス}}$ となる．

　したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \boxed{\text{セ}}$ である．

(13 明治大 総合数理 3)

コ	サ	シ	ス	セ
$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{19}{36}$	$\dfrac{5}{12}p_{n-1}+\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{7}+\dfrac{5}{21}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1}$	$\dfrac{3}{7}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

漸化式を立てるときのポイントは n 回目から $n+1$ 回目への状況変化において，排反でかつすべてを網羅する場合分けをキチンとつくることです．

【解答】

(1) 操作を 1 回行って点 P が A 上にあるのは，P が A にとどまるときだから

$$\frac{2}{3}\circlearrowright \mathrm{A} \underset{\frac{1}{4}}{\overset{\frac{1}{3}}{\rightleftarrows}} \mathrm{B} \circlearrowleft \frac{3}{4}$$

← 条件を図式化しておく．

$$p_1 = \underset{コ}{\boxed{\boldsymbol{\frac{2}{3}}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

操作を 2 回行って点 P が A 上にあるのは,「1 回目，2 回目ともに A にとどまる」または「1 回目に A から B に移り，2 回目に B から A に移る」ときであるから

← これらは排反である．この具体例は (2) のヒントである．

$$p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \underset{サ}{\boxed{\boldsymbol{\frac{19}{36}}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 操作を n 回行って点 P が A 上にあるのは

← チェクリピ 352

(i) $n-1$ 回後に点 P が A 上にあって，次の n 回目の操作を行って A にとどまる．

(ii) $n-1$ 回後に点 P が B 上にあって，次の n 回目の操作を行って A に移る．

のいずれかである．これらは排反であるから

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{2}{3} + (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad p_n = \underset{シ}{\boxed{\boldsymbol{\frac{5}{12} p_{n-1} + \frac{1}{4}}}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

← 2 項間漸化式

(3) $\alpha = \frac{5}{12}\alpha + \frac{1}{4}$ を満たす $\alpha = \frac{3}{7}$ を用いると，①は次のように変形される．

$$\begin{array}{rrcl} & p_n & = & a p_{n-1} + b \\ -) & \alpha & = & a\alpha \quad\;\; + b \\ \hline & p_n - \alpha & = & a(p_{n-1} - \alpha) \end{array}$$

$$p_n - \frac{3}{7} = \frac{5}{12}\left(p_{n-1} - \frac{3}{7}\right)$$

$\left\{p_n - \frac{3}{7}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{3}{7} = \frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{5}{21}$，公比 $\frac{5}{12}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{3}{7} = \frac{5}{21}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad p_n = \underset{ス}{\boxed{\boldsymbol{\frac{3}{7} + \frac{5}{21}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \underset{セ}{\boxed{\boldsymbol{\frac{3}{7}}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

← $|r| < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$