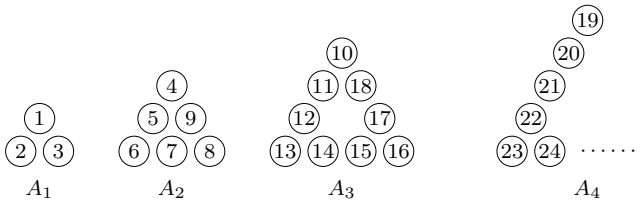
下図のように，1 から順に番号の付いた碁石を並べてつくられた正三角形の列 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$ がある．正三角形 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の右下隅にある碁石の番号を a_n とし，A_n 中のすべての碁石の番号の和を S_n とする．
(例　$a_1=3,\ a_2=8,\ a_3=16,\ S_2=4+5+6+7+8+9=39$)



(1) a_n の一般項を求めよ．

(2) S_n の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k\left(S_k-\frac{3}{2}k\right)$ を，ある関数の定積分を用いて表し，この極限値を求めよ．

(13 群馬大 教育・理工 6)

(1) $\dfrac{1}{2}(3n^2+n+2)$

(2) $\dfrac{3}{2}n(3n^2+1)$

(3) $\dfrac{9}{10}$

【チェック・チェック】

三角形をじっとみつめて数字が並ぶ規則を見つけましょう．規則をみつけたら A_n の最大番号を n で表してみましょう．
これにより (1)，(2) は解決します．(3) は区分求積に持ち込みなさいというヒントまでついていますね．

【解答】

(1) 正三角形 A_n に含まれる碁石の個数は ↙，⟶，↖ の順に数えると

$$(n+1)+n+(n-1)=3n \text{ (個)}$$

であり，最大の数字は

$$3+6+\cdots+3n=3(1+2+\cdots+n)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

したがって，正三角形 A_n の右下隅にある碁石の番号 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{2}n(n+1)-(n-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(3n^2+n+2)} \end{aligned}$$

……(答)

← 二度数えしないように注意すると
↙ 上に $n+1$ 個，
⟶ 上に n 個，
↖ 上に $n-1$ 個
の碁石が並んでいる．

(2) 正三角形 A_n に含まれる碁石の数字を小さい順に並べると，初項 $\frac{3}{2}(n-1)n+1$，末項 $\frac{3}{2}n(n+1)$，項数 $3n$ の等差数列であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3n}{2}\left\{\frac{3}{2}(n-1)n+1+\frac{3}{2}n(n+1)\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}n(3n^2+1)} \end{aligned}$$

……(答)

← $\dfrac{(\text{項数})(\text{初項}+\text{末項})}{2}$

(3) (2) より

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k\left(S_k-\frac{3}{2}k\right) \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k\left\{\frac{3}{2}k(3k^2+1)-\frac{3}{2}k\right\} \\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{2}k^4\right)=\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{1}{n} \\ &=\frac{9}{2}\int_0^1 x^4\,dx=\frac{9}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &=\boldsymbol{\frac{9}{10}} \end{aligned}$$

……(答)

← 区分求積
チェクリピ 227