(1) 次の式が成り立つように，定数 A, B, C, D を定めよ．

$$\frac{8}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{8}$，$\tan\dfrac{3\pi}{8}$ の値を求めよ．

(3) 次の定積分を求めよ．

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4}\,dx$$

(13 信州大 後期 医 5)

(1) $A=1,\ B=2,\ C=-1,\ D=2$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$，$\tan\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$

(3) $\pi + 2\log(\sqrt{2}+1)$

【チェック・チェック】

方針に迷うことはないでしょうが，計算量は多いです．
最後までたどり着いたら計算力ありと判断してよいでしょう．

【解答】

(1) 右辺を整理すると

$$\text{右辺} = \frac{(Ax+B)(x^2-2x+2)+(Cx+D)(x^2+2x+2)}{\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}}$$
$$= \frac{\begin{array}{l}\{Ax^3+(-2A+B)x^2+(2A-2B)x+2B\}\\ \quad +\{Cx^3+(2C+D)x^2+(2C+2D)x+2D\}\end{array}}{(x^2+2)^2-4x^2}$$
$$= \frac{\begin{array}{r}(A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2\\ +2(A-B+C+D)x+2(B+D)\end{array}}{x^4+4}$$

右辺と比較すると

$$\begin{aligned}&(A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2\\ &\qquad +2(A-B+C+D)x+2(B+D)=8\end{aligned}$$

これが x の整式として等しくなる条件は，係数を比較して

$$\begin{cases} A+C=0 & \cdots\cdots ① \\ -2A+B+2C+D=0 & \cdots\cdots ② \\ A-B+C+D=0 & \cdots\cdots ③ \\ B+D=4 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

である．

$$① \text{ かつ } ③ \iff \begin{cases} A+C=0 \\ B-D=0 \end{cases}$$

かつ

$$② \text{ かつ } ④ \iff \begin{cases} A-C=2 \\ B+D=4 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A-C=2 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} B-D=0 \\ B+D=4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A=1,\ B=2,\ C=-1,\ D=2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{3\pi}{8}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\dfrac{\pi}{8}>0$，$\tan\dfrac{3\pi}{8}>0$ である．

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{8}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{2}-1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

← x についての恒等式である

← $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ と半角の公式を使っている．

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{2}+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

← 上と同じように計算してもよい.

(3) 求める定積分を I とおく．(1) より

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4}\,dx$$

← $\dfrac{8}{x^4+4}$ は偶関数

$$= 2\left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-x+2}{x^2-2x+2}\,dx\right)$$

第 2 項目において $-x = t$ とおくと

$$-dx = dt$$

x	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{2}$
t	0	$\longrightarrow$	$-\sqrt{2}$

であるから

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{-x+2}{x^2-2x+2}\,dx$$
$$= \int_0^{-\sqrt{2}} \frac{t+2}{(-t)^2-2(-t)+2}(-1)\,dt$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t+2}{t^2+2t+2}\,dt$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

したがって,

$$I = 2\left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx\right)$$
$$= 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$
$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{(2x+2)+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

← 計算量が半分になった. $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ のままで第 2 項目を置換積分してもこの式は得られる．偶関数を用いた効果はあまりなかった.

ここで，$I_1 = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$，$I_2 = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2-2x+2}\,dx$ とおく.

$$I_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx = \Big[\log(x^2+2x+2)\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$
$$= \log(4+2\sqrt{2}) - \log(4-2\sqrt{2}) = \log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$
$$= \log(\sqrt{2}+1)^2$$
$$= 2\log(\sqrt{2}+1)$$

← 被積分関数の分子が分母の微分になっていることに着目する. チェクリピ III 194

また

$$I_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$x+1=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\qquad \begin{array}{c|ccc} x+1 & -\sqrt{2}+1 & \longrightarrow & \sqrt{2}+1 \\ \hline \theta & -\dfrac{\pi}{8} & \longrightarrow & \dfrac{3\pi}{8} \end{array}\qquad (\because\ (2))$$

であるから

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{\tan^2\theta+1}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 2\,d\theta \\ &= 2\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = 2\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって,

$$I=\boldsymbol{\pi+2\log(\sqrt{2}+1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

← この置き換えは常套手段.
チェクリピ III 199