数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を

$$a_n = \int_0^1 x(1-x)^n\,dx,\ b_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める.

(1) a_n を求めよ.

(2) b_n を求めよ.

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とする. $\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ.

(13 埼玉大 工 2)

(1) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(2) $b_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(3) $\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{1}{6}$

【チェック・チェック】

(1)，(2) は $t=1-x$ と置いて，置換積分することもできますが，一般性を考えると，部分積分が威力を発揮します.

【解答】

(1) 部分積分すると

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x(1-x)^n\,dx \\
&= \left[x\cdot\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}(-1)\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\,dx \\
&= \left[\frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}(-1)\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

⟵ $(1-x)^n$ を積分し，x を微分する方向で部分積分する.

(2) 部分積分すると

$$
\begin{aligned}
b_n &= \int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx \\
&= \left[x^2\cdot\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}(-1)\right]_0^1 + \int_0^1 2x\cdot\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\,dx \\
&= \frac{2}{n+1}\int_0^1 x(1-x)^{n+1}\,dx \\
&= \frac{2}{n+1}a_{n+1}
\end{aligned}
$$

⟵ $(1-x)^n$ を積分し，x^2 を微分する方向で部分積分する.

⟵ (1) の結果が使える.

(1) の n を $n+1$ にかえて

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

(3) b_k を階差に分解すると

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n b_k = 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \\
&= (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1}) \\
&= a_1 - a_{n+1} \\
&= \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}
\end{aligned}
$$

⟵ この分解はスムーズに行えるようにしておく.

⟵ $\sum$(階差)

⟵ 最初の項と最後の項が残る.

⟵ 極限を求めるのが目標なので，これ以上整理しない.

よって，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\} = \mathbf{\frac{1}{6}} \quad \cdots\cdots (答)$$

- 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の積分を一般化すると

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

←― チェクリピ III 221

である．これは (1)，(2) を同じように部分積分を続けていくと得られる結果である．

特に，$m=n=1$ のときの結果式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx = \frac{1}{3!}(\beta-\alpha)^3$$

すなわち

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

←― 「6 分の 1 公式」などと呼ばれている．

は数学 II では重要公式である．