(1) $f(x)$ を区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義された連続関数とする．次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

(2) $a > 1$ とする．(1) を用いて，積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x(a^2 - 4\cos^2 x)\sin x}{a^2 - \cos^2 x}\,dx$$

を求めよ．

(13 埼玉大 工 3)

(1) 略

(2) $\left(4 + \dfrac{3a}{2}\log\dfrac{a-1}{a+1}\right)\pi$

【チェック・チェック】

(1) は類題を経験していないと糸口を見つけにくいかもしれません．

部分積分しても変形後に残る積分は $\int f(\sin x)\,dx$ の形にはならないので，置換積分を考えます．$f(\sin x)$ が $f(\sin t)$ となる置き換えとして $x=\pi-t$ を考えてみましょう．

(2) は当然 (1) を利用します．ここから先は置換積分と有理関数の積分の練習問題となります．

【解答】

(1) $x=\pi-t$ とおくと　　←― 置換積分

$$dx=-dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \pi \\ \hline t & \pi & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx &= -\int_\pi^0 (\pi-t)f(\sin(\pi-t))\,dt \\ &= \int_0^\pi (\pi-t)f(\sin t)dt \\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi tf(\sin t)\,dt \\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx-\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

←― 左辺と同じ式が現れた．

よって

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

$$\therefore \int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx \quad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(2) $$\frac{(a^2-4\cos^2 x)\sin x}{a^2-\cos^2 x}=\frac{(a^2-4+4\sin^2 x)\sin x}{a^2-1+\sin^2 x}$$

に対し，$f(x)=\dfrac{(a^2-4+4x^2)x}{a^2-1+x^2}$ とおくと，

$$(\text{分子})=(a^2-4+4x^2)x,\ (\text{分母})=a^2-1+x^2$$

はともに連続であり，また，$a>1$ より，すべての実数 x に対して $(\text{分母})=a^2-1+x^2\neq 0$ であるから，$f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq 1$ で連続である．(1) の等式を用いることができ，与式を I とおくと　　←― (1) の仮定が成り立つことを確認する．

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx \\ &=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{(a^2-4\cos^2 x)\sin x}{a^2-\cos^2 x}\,dx\end{aligned}$$

$\cos x=t$ とおくと　　←― この置き換えは常套手段．チェクリピ 202

$$-\sin x\,dx=dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & \pi \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & -1 \end{array}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{a^2-4t^2}{a^2-t^2}\,dt = 2\times\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{4t^2-a^2}{t^2-a^2}\,dt \\
&= \pi\int_0^1\left(4+\frac{3a^2}{t^2-a^2}\right)dt = 4\pi+\pi\int_0^1\frac{3a^2}{t^2-a^2}\,dt
\end{aligned}
$$

⟵ 割り算を実行して $\dfrac{(2\text{ 次式})}{(2\text{ 次式})}$ を (分子の次数) < (分母の次数) の形に変形する.

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{3a^2}{t^2-a^2}\,dt &= 3a^2\int_0^1\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t+a}\right)dt \\
&= \frac{3a}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t+a}\right)dt \\
&= \frac{3a}{2}\Big[\log|t-a|-\log|t+a|\Big]_0^1 \\
&= \frac{3a}{2}\log\frac{|1-a|}{|1+a|} \\
&= \frac{3a}{2}\log\frac{a-1}{a+1} \quad (\because\ a>1)
\end{aligned}
$$

⟵ 部分分数分解

⟵ $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$ (C は積分定数)

よって,

$$
\begin{aligned}
I &= 4\pi+\frac{3a}{2}\pi\log\frac{a-1}{a+1} \\
&= \boldsymbol{\left(4+\frac{3a}{2}\log\frac{a-1}{a+1}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$