(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき，次の等式が成り立つことを示せ.

(i) $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ (ii) $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (iii) $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2) a, b を実数とする．x を未知数とする方程式 $a\sin x+b\cos x+1=0$ が，$-\pi<x<\pi$ の範囲に相異なる二つの解をもつとする.

(i) a, b の満たすべき条件を求めよ.

(ii) 二つの解を α, β とするとき，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を a, b を用いて表せ.

(3) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x+1}\,dx$$

(13 大阪教育大 1)

(1) 略

(2) (i) $b\fallingdotseq 1$ かつ $a^2+b^2>1$

(ii) $b\fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{a}{b}$，$b=0$ のときはなし

(3) $\log 2$

【チェック・チェック】

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ は三角関数を有理式に変える重要な変数変換です．

(1) は三角関数 sin，cos，tan を t の有理式として具体的に表しています．

(2)，(3) はこの応用で，(2) は三角方程式を 2 次方程式に置き換える，(3) は積分計算といった問題構成になっています．

【解答】

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく．　　$\longleftarrow$ チェクリピ IIB 142

(i) 2 倍角の公式より

$$\sin x=\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\qquad\cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

$\longleftarrow \cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

(ii) (i) と同様に

$$\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}-1$$

$$=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\cdots\cdots$(証明終わり)

(iii) (i)，(ii) の結果から

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2t}{1-t^2}\qquad\cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(2) (i) (1) より

$$a\sin x+b\cos x+1=0\qquad\cdots\cdots(*)$$

$$\Longleftrightarrow a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$$

$$\Longleftrightarrow (1-b)t^2+2at+1+b=0\qquad\cdots\cdots(**)$$

また，$-\pi<x<\pi$ より $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ は単調増加で，すべての実数値をとるから，$(*)$ の解 x の個数と $(**)$ の解 t の個数は一致する．

$\longleftarrow$ $(*)$ の解と $(**)$ の解の対応関係

$(*)$ が相異なる二つの実数解をもつためには，まず $(**)$ が 2 次方程式であることが必要である．このときの 2 次方程式の判別式を D とおくと

$\longleftarrow$ $(**)$ が 2 次方程式である条件は $1-b\neq 0$

$$\frac{D}{4}=a^2-(1-b)(1+b)=a^2+b^2-1$$

よって，$(*)$ が相異なる二つの実数解をもつ条件は

$$\begin{cases}b\neq 1\\ D>0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}\boldsymbol{b\neq 1}\\ \boldsymbol{a^2+b^2>1}\end{cases}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

(ii) 加法定理より

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$$

ここで，$\tan\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\beta}{2}$ は 2 次方程式 $(**)$ の 2 つの解より

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=-\frac{2a}{1-b},\quad \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1+b}{1-b}$$

⟵ 2 次方程式の解と係数の関係

であるから

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-\frac{2a}{1-b}}{1-\frac{1+b}{1-b}}=\frac{-2a}{(1-b)-(1+b)}=\frac{a}{b}$$

⟵ $\frac{a}{b}$ が定義されるのは $b \fallingdotseq 0$ のときである．

ここで $b=0$ とすると，$(**)$ は

$$t^2+2at+1=0$$

$$\frac{D}{4}=a^2-1>0 \qquad \therefore\ a<-1 \text{ または } 1<a$$

このとき $(*)$ は

$$a\sin x+1=0 \qquad \therefore\ \sin x=-\frac{1}{a}$$

$-\pi<x<\pi$ の範囲でこの方程式を満たす x の値が 2 個存在するが，この 2 つの解 α，β は $x=\pm\frac{\pi}{2}$ に対称であるから

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$$

このとき tan は定義されないから，$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ の値は存在しない．

⟵ $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta$ は定義されない．

よって $\quad \boldsymbol{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\begin{cases}\frac{a}{b} & (b \fallingdotseq 0 \text{ のとき})\\ \text{なし} & (b=0 \text{ のとき})\end{cases}}$

……(答)

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x+1}\,dx$ とおく．$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと

⟵ $\tan\frac{x}{2}=t$ とおいて，置換積分を実行する．

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx=dt$$

$$\therefore\quad dx=2\cos^2\frac{x}{2}dt=(1+\cos x)dt$$
$$=\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt=\frac{2}{1+t^2}dt$$

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

よって

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{2+2t} dt \\
&= \Big[\log|t+1| \Big]_0^1 \\
&= \mathbf{log\,2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$