自然数 n に対し

$$I_n=\int_0^{2\pi n}e^{-x}\cos x\,dx,\quad J_n=\int_0^{2\pi n}e^{-x}\sin x\,dx$$

とおく． I_n と J_n を求め，さらに $\lim_{n\to\infty}I_n$ と $\lim_{n\to\infty}J_n$ を求めよ．

(13 広島大 後期 理 (数) 2(2))

$$I_n=J_n=\frac{1-e^{-2\pi n}}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}J_n=\frac{1}{2}$$

【チェック・チェック】

部分積分の公式は

積分する　　そのまま

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

そのまま　　微分する

でしたね．I_n，J_n どちらも 2 回部分積分すれば元の式に戻ります．

2 回の部分積分計算がスムーズにできるようになったら，計算を減らす工夫をしてみましょう．

【解答】

部分積分を繰り返すと

←― チェクリピ 209

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi n} e^{-x}\cos x\,dx \\ &= \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{2\pi n} + \int_0^{2\pi n} e^{-x}(-\sin x)\,dx \\ &= -e^{-2\pi n} + 1 - \Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{2\pi n} - \int_0^{2\pi n} e^{-x}\cos x\,dx \\ &= 1 - e^{-2\pi n} - I_n \end{aligned}$$

←― e^{-x} を積分し，$\cos x$ を微分する方向に部分積分した．
チェクリピ 部分積分

$$\therefore\quad \boldsymbol{I_n = \frac{1-e^{-2\pi n}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{2\pi n} e^{-x}\sin x\,dx \\ &= \Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{2\pi n} + \int_0^{2\pi n} e^{-x}\cos x\,dx \\ &= I_n \end{aligned}$$

←― e^{-x} を積分し，$\sin x$ を微分する方向に部分積分した．

$$\therefore\quad \boldsymbol{J_n = \frac{1-e^{-2\pi n}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

さらに，$\lim\limits_{n\to\infty} e^{-2\pi n} = 0$ より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = \frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(別解 1)　部分積分して，I_n，J_n の関係式をつくる．

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi n} e^{-x}\cos x\,dx \\ &= \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{2\pi n} + \int_0^{2\pi n} e^{-x}(-\sin x)\,dx \\ &= -e^{-2\pi n} + 1 - J_n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad I_n + J_n = 1 - e^{-2\pi n} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$J_n = \int_0^{2\pi n} e^{-x} \sin x \, dx$$
$$= \Big[-e^{-x} \sin x \Big]_0^{2\pi n} + \int_0^{2\pi n} e^{-x} \cos x \, dx$$
$$= I_n$$

$$\therefore \quad I_n = J_n \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$I_n = J_n = \frac{1-e^{-2\pi n}}{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

以下，解答と同じ.

(別解 2)　$e^{-x}\cos x$，$e^{-x}\sin x$ の原始関数をつくる.

$$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x \qquad \cdots\cdots ③$$
$$(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \qquad \cdots\cdots ④$$

④ − ③ より　$2e^{-x}\cos x = \{e^{-x}(\sin x - \cos x)\}'$

④ + ③ より　$-2e^{-x}\sin x = \{e^{-x}(\sin x + \cos x)\}'$

C を積分定数とすると

$$\int e^{-x}\cos x \, dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C$$
$$\int e^{-x}\sin x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

したがって，

$$I_n = \left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) \right]_0^{2\pi n} = \frac{1-e^{-2\pi n}}{2}$$
$$J_n = \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) \right]_0^{2\pi n} = \frac{1-e^{-2\pi n}}{2}$$

以下，解答と同じ.