自然数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_1^{e^2} (\log x)^n \, dx$ と定める．ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする．以下の各問に答えよ．

(1) I_1 を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，I_n を n と I_{n-1} を用いて表せ．

(3) I_4 を求めよ．

(13 茨城大 後期 理 4)

(1) $I_1 = e^2 + 1$

(2) $I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}$ $(n \geqq 2)$

(3) $I_4 = 8e^2 - 24$

【チェック・チェック】

対数関数を微分する方向で部分積分します．すなわち

$$\int (\log x)^n\,dx = \int 1\cdot(\log x)^n\,dx$$
$$= x\cdot(\log x)^n - \int x\cdot n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx$$

として計算していきます．

【解答】

(1) 部分積分する．

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{e^2} 1\cdot\log x\,dx \\ &= \Big[x\log x\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= e^2\cdot 2 - \Big[x\Big]_1^{e^2} \\ &= 2e^2-(e^2-1) \\ &= \boldsymbol{e^2+1} \end{aligned}$$

……(答)

$\longleftarrow \displaystyle\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx$ とみて部分積分します．
チェクリピ 210

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^{e^2} 1\cdot(\log x)^n\,dx \\ &= \Big[x(\log x)^n\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\cdot n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx \\ &= e^2\cdot 2^n - n\int_1^{e^2}(\log x)^{n-1}\,dx \\ &= 2^n e^2 - nI_{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}}$$

……(答)

$\longleftarrow$ 定積分と漸化式
チェクリピ 225

(3) (1)，(2) の結果より

$$\begin{aligned} I_4 &= 2^4e^2-4I_3 \\ &= 16e^2-4(2^3e^2-3I_2) \\ &= -16e^2+12(2^2e^2-2I_1) \\ &= 32e^2-24(e^2+1) \\ &= \boldsymbol{8e^2-24} \end{aligned}$$

……(答)