a, b を実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = a\cos x + b$ が,

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \{f(x)\}^3\,dx$$

をみたすとする．このとき，a, b がみたす関係式を求めよ．

(2) (1) で求めた関係式をみたす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ．

(13 神戸大 理系 4)

(1) $4b^3+2(3a^2-2)b+1=0$

(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{6}} \leqq a \leqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

【チェック・チェック】

$f(x) = a\cos x + b$ を与えられた式に代入し，積分の計算をすればよいのですが，計算は極力減らしたいものです．積分区間は $0 \leqq x \leqq \pi$ であり， $y = \cos x$ のグラフは点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であることに着目しましょう．

【解答】

(1) $y = \cos x$, $y = \cos^3 x$ はともに点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であり

$$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx = 0$$

$\longleftarrow$ 対称性を利用して計算量を減らす工夫をする．

である．したがって，

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} (a\cos x + b)\, dx = \Big[bx\Big]_0^{\pi} = b\pi$$

また

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \{f(x)\}^3\, dx \\
=&\int_0^{\pi} (a^3\cos^3 x + 3a^2 b\cos^2 x + 3ab^2\cos x + b^3)\, dx \\
=&\int_0^{\pi} \left(3a^2 b\frac{1+\cos 2x}{2} + b^3\right)\, dx \\
=&\left[\frac{3}{2}a^2 b\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + b^3 x\right]_0^{\pi} \\
=&\left(\frac{3}{2}a^2 b + b^3\right)\pi
\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 計算量が半分に減った．

である．$f(x)$ は

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \{f(x)\}^3\, dx$$

をみたすから

$$b\pi = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{3}{2}a^2 b + b^3\right)\pi$$

$$\therefore\ \boldsymbol{4b^3 + 2(3a^2 - 2)b + 1 = 0} \quad \cdots\cdots ① \quad \cdots\cdots(答)$$

(2) ①をみたす正の数 b が存在するための a の条件は

$$6a^2 = -4b^2 - \frac{1}{b} + 4$$

をみたす正の数 b が存在することである．

$\longleftarrow$ by 平面上での直線 $y = 6a^2$ と曲線 $y = -4b^2 - \dfrac{1}{b} + 4$ の共有点が $b > 0$ の範囲に存在するための a の条件を求める．

$g(b) = -4b^2 - \dfrac{1}{b} + 4$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(b) &= -8b + \frac{1}{b^2} = \frac{-8b^3 + 1}{b^2} \\
&= -\frac{(2b-1)(4b^2 + 2b + 1)}{b^2}
\end{aligned}$$

$b>0$ における増減表は次の通りである．

b	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$(+\infty)$
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$(-\infty)$

よって，求める a の条件は

$$6a^2 \leqq 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{6}} \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$