

関数  $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f(\sqrt{3})$  を求めよ。
- (2) 定積分  $\int_0^{\sqrt{3}} xf(x) dx$  の値を求めよ。
- (3)  $x > 0$  のとき、 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$  が定数であることを示し、その値を求めよ。

(13 芝浦工大 2月1日 4)

---

【答】

- (1)  $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
- (2)  $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) 証明略,  $\frac{\pi}{2}$

## 【チェック・チェック】

(1) は置換積分で、(2) は部分積分です。この辺りは機械的に計算できるようにしておくべきです。方針で困るようなら練習量が足りないということです。

(3) 関数が定数であることを示すには、その導関数がつねに 0 であることを示せばよいですね。あとは適当な値を代入してその定数の値を求めます。(1) があるので  $x = \sqrt{3}$  を代入するとよいでしょう。

### 【解答】

(1)  $t = \tan \theta$  とおくと

$$dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{l|l} t & 0 \rightarrow \sqrt{3} \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad \dots\dots (\text{答})$$

← 置換積分します。

← キレイな式に整理された。

(2) 部分積分する。

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{3}} xf(x) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} f(x) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} f(\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} f(\sqrt{3}) - \frac{1}{2} (\sqrt{3} - f(\sqrt{3})) \\ &= 2f(\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots (\text{答})$$

←  $x$  と  $f(x)$  の積の積分なので、部分積分して被積分関数を簡単な式に変えていきます。すなわち、  
 $x$  は積分、  
 $f(x)$  は微分  
する方向に部分積分します。

(3)  $x$  で微分すると

$$\begin{aligned} &\left( f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$  は定数である。  $\dots\dots$  (証明終わり)

← ある関数が定数であることを示すには、その関数の導関数がつねに 0 であることを示せばよい。

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$  は定数であるから、求める値を  $f(\sqrt{3})+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  としてよい. (1) と同じようにして  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  を計算すると

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

である. よって、求める値は

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= f(\sqrt{3}) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

……(答)

← どの値 ( $> 0$ ) を入れてもよいのだが、問題の流れから  $x = \sqrt{3}$  とする.