

関数 $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(\sqrt{3})$ を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_0^{\sqrt{3}} xf(x) dx$ の値を求めよ。
- (3) $x > 0$ のとき、 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ が定数であることを示し、その値を求めよ。

(13 芝浦工大 2 月 1 日 4)

【答】

- (1) $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
- (2) $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (3) 証明略, $\frac{\pi}{2}$

【チェック・チェック】

(1) は置換積分で、(2) は部分積分です。この辺りは機械的に計算できるようにしておくべきです。方針で困るようなら練習量が足りないということです。

(3) 関数が定数であることを示すには、その導関数がつねに 0 であることを示せばよいですね。あとは適当な値を代入してその定数の値を求めます。(1) があるので $x = \sqrt{3}$ を代入するとよいでしょう。

【解答】

(1) $t = \tan \theta$ とおくと

$$dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{l|l} t & 0 \rightarrow \sqrt{3} \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 部分積分する。

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{3}} xf(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} f(x) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} f(\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} f(\sqrt{3}) - \frac{1}{2} (\sqrt{3} - f(\sqrt{3})) \\ &= 2f(\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) x で微分すると

$$\begin{aligned} &\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ は定数である。……(証明終わり)

← 置換積分します。

← キレイな式に整理された。

← x と $f(x)$ の積の積分なので、部分積分して被積分関数を簡単な式に変えていきます。すなわち、
 x は積分、
 $f(x)$ は微分
する方向に部分積分します。

← ある関数が定数であることを示すには、その関数の導関数がつねに 0 であることを示せばよい。

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ は定数であるから、求める値を $f(\sqrt{3})+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ としてよい. (1) と同じようにして $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を計算すると

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

である. よって、求める値は

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= f(\sqrt{3}) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

……(答)

← どの値 (> 0) を入れてもよいのだが、問題の流れから $x = \sqrt{3}$ とする.