a と b を正の実数とする．$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y = b\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする．

(1) P の x 座標を t とする．このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ．

(2) C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ．

(3) C_1，C_2 と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする．
このとき，$T = 2S$ となるための条件を a と b で表せ．

(13 北海道大 理 1)

(1) $\sin t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $S = \sqrt{a^2+b^2} - b$

(3) $b = \dfrac{4}{3}a$

【チェック・チェック】

三角関数で表された曲線と直線により囲まれた領域の面積についての基本問題です.
面積計算では，グラフの上下関係が分るように図をかくようにしましょう.

【解答】

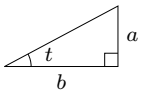
(1) $a>0,\ b>0$ より，
$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

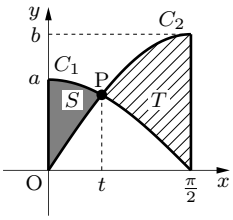
$$a\cos t = b\sin t$$

を満たす t は $t \neq \dfrac{\pi}{2}$ であり

$$\tan t = \frac{a}{b}$$

を満たすから





$$\boldsymbol{\sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \quad \cdots\cdots(答)$$

← 交点 P の y 座標

- $a\cos t = b\sin t$
  $a>0,\ b>0$ であるから

$$\frac{\cos t}{b} = \frac{\sin t}{a} = k$$

$$\cos t = bk,\ \sin t = ak$$

← 比例式としてこの式を処理する.

とおくことができる．$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ に代入すると

$$(ak)^2 + (bk)^2 = 1 \qquad \therefore \quad k^2 = \frac{1}{a^2+b^2}$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $k>0$ であり　$k = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

よって　$\sin t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) 面積 S は，図の網目部分であり

← 面積計算では，グラフの上下関係が分るように図をかくようにしよう.

$$S = \int_0^t (a\cos x - b\sin x)\,dx = \Big[a\sin x + b\cos x\Big]_0^t$$

$$= a\sin t + b\cos t - b = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - b$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2} - b} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) 面積 T は，図の斜線部分であり

$$T = \int_t^{\frac{\pi}{2}} (b\sin x - a\cos x)\,dx = \Big[-b\cos x - a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -a + b\cos t + a\sin t = -a + \frac{b^2+a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} - a$$

これより

$$T = 2S \iff \sqrt{a^2+b^2} - a = 2(\sqrt{a^2+b^2} - b)$$
$$\iff 2b - a = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\iff \begin{cases} 2b - a > 0 & \cdots\cdots ① \\ (2b-a)^2 = a^2 + b^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

←― 無理方程式の同値変形
チェクピリ 85

②より

$$3b^2 = 4ab$$

$b > 0$ より

$$b = \frac{4}{3}a$$

これは①を満たす．よって，求める条件は

$$\boldsymbol{b = \frac{4}{3}a} \ (> 0) \qquad \cdots\cdots (答)$$