6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる 3 個の数字を取りだして，百の位は 0 とはならないように 3 桁の数を作る．このとき，2 の倍数は $\boxed{\textbf{アイ}}$ 個，5 の倍数は $\boxed{\textbf{ウエ}}$ 個，3 の倍数は $\boxed{\textbf{オカ}}$ 個できる．

(13 青山学院大 経済 2(1))

アイ	ウエ	オカ
52	36	40

【チェック・チェック】

2 の倍数，5 の倍数であるための条件は大丈夫でしょうが，3 の倍数であるための条件はどうでしょう．

自然数 n が 3 の倍数であるための条件は各位の数字の和が 3 の倍数であることです．

たとえば，2013 は

$$2+0+1+3=6$$

ですから 3 の倍数です．

結果を覚えるのではなく，この事実を証明できるようにしておきましょう．(チェクリピ 231)

【解答】

2 の倍数の個数について；
2 の倍数となるのは一の位の数字が 0，2，4 のいずれかのときである．

←― 2 の倍数であるための条件

一の位の数字が 0 のとき，百の位，十の位の数字の決め方は $5\cdot 4=20$ 通り

←― チェクリピ 積の法則

一の位の数字が 2 のとき，百の位の数字は 0 とはならないことに注意すると，百の位，十の位の数字の決め方は　$4\cdot 4=16$ 通り

一の位が 4 のとき，同じく 16 通り

よって，2 の倍数は　$20+16+16=\underset{\text{アイ}}{\boxed{\mathbf{52}}}$ 個

←― チェクリピ 和の法則

- $\boxed{}\boxed{}\boxed{偶}$ (百の位に 0 も認める) の総数から $\boxed{0}\boxed{}\boxed{偶}$ の総数を除く．

  ←― 制約を一旦外しておいて，その中から不適切なものを除く．

  $\boxed{}\boxed{}\boxed{偶}$ タイプは，一の位の数字の決め方が 3 通り，その各々に対して百の位，十の位の数字の決め方が $5\cdot 4=20$ 通りある．

  $\boxed{0}\boxed{}\boxed{偶}$ タイプは，一の位の数字の決め方が 2 通り，その各々に対して十の位の数字の決め方が 4 通りある．

  よって，求める個数は

  $$3\cdot 20-2\cdot 4=60-8=52 \text{ (個)}$$

5 の倍数の個数について；
5 の倍数となるのは一の位の数字が 0，5 のいずれかのときである．

←― 5 の倍数であるための条件

一の位の数字が 0 のとき，百の位，十の位の数字の決め方は $5\cdot 4=20$ 通り

一の位の数字が 5 のとき，百の位は 0 とはならないことに注意すると，百の位，十の位の数字の決め方は　$4\cdot 4=16$ 通り

よって，5 の倍数は　$20+16=\underset{\text{ウエ}}{\boxed{\mathbf{36}}}$ 個

- 百の位の数字が 0 であることも認めた 5 の倍数の総数から $\boxed{0}\boxed{}\boxed{5}$ タイプの 5 の倍数の総数を除く．

  一の位の数字の決め方が 2 通り，その各々に対して百の位，十の位の数字の決め方が $5\cdot 4=20$ 通りある．

  $\boxed{0}\boxed{}\boxed{5}$ タイプの 5 の倍数は十の位の数字の決め方が 4 通りある．

　よって，求める個数は

$$2 \cdot 20 - 4 = 36\ (\text{個})$$

3 の倍数の個数について；
3 の倍数となるのは各位の数字の和が 3 の倍数となるときである．
6 個の数字を 3 で割った余りで分類すると

$$\{0,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 6\}$$

の 3 つに分かれる．したがって，3 の倍数となるのは

$$\{0,\ 1,\ 2\},\ \{0,\ 1,\ 6\},\ \{0,\ 4,\ 2\},\ \{0,\ 4,\ 6\},$$
$$\{3,\ 1,\ 2\},\ \{3,\ 1,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 2\},\ \{3,\ 4,\ 6\}$$

を並べたものである．百の位は 0 とはならないことに注意すると，3 の倍数は

$$4 \times 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 16 + 24 = \underset{\text{オカ}}{\boxed{\mathbf{40}}}\ \text{個}$$

← 3 の倍数であるための条件

- 百の位の数字が 0 であることも認めた 3 の倍数の総数から $\boxed{0}\boxed{}\boxed{}$ タイプの 3 の倍数の総数を除く．

　6 個の数字を 3 で割った余りで分類して

$$\{0,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 6\}$$

とする．
百の位の数字の決め方は，どの類のどちらの数字を使うかと考えると $3 \cdot 2$ 通り，
その各々に対して十の位の数字の決め方は，$2 \cdot 2$ 通り，
その各々に対して一の位の数字の決め方は，$1 \cdot 2$ 通りである．
　したがって，百の位の数字が 0 であることも認めた 3 の倍数の個数は

$$3 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 = 48\ (\text{個})$$

$\boxed{0}\boxed{}\boxed{}$ タイプの 3 の倍数の個数は

$$2 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 = 8\ (\text{個})$$

　よって，求める個数は

$$48 - 8 = 40\ (\text{個})$$