6 つの面すべてに図のような各面を 9 等分する平行線の入った立方体 ABCD–EFGH において，G から A まで立方体の辺または平行線上を通って行く最短経路を考える．ただし，辺は両端点を含むものとする．

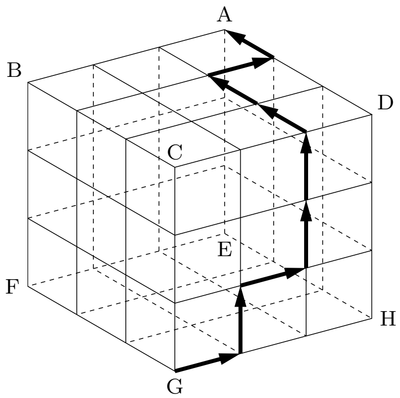
(1) C を通って G から A まで行く最短経路は $\boxed{\text{ヘ}}$ 通りある．

(2) 辺 BC 上の少なくとも 1 つの点を通って G から A まで行く最短経路は $\boxed{\text{ホ}}$ 通りある．

(3) 辺 BC もしくは辺 CD 上の少なくとも 1 つの点を通って G から A まで行く最短経路は $\boxed{\text{マ}}$ 通りある．

(4) 辺 EF もしくは辺 EH 上の少なくとも 1 つの点を通って G から A まで行く最短経路は $\boxed{\text{ミ}}$ 通りある．

(5) G から A まで行く最短経路は $\boxed{\text{ム}}$ 通りある．



(13 上智大 神・総合人間科学・法・外国語 2 月 4 日 3)

ヘ	ホ	マ	ミ	ム
20	84	148	148	384

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

空間版の最短経路の問題です.

(1)〜(4) が (5) の準備となっています.

重複して数えることがないように注意しましょう.

【解答】

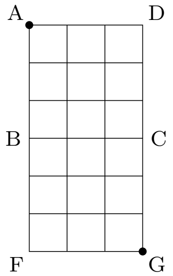
(1) G から C まで行く最短経路は 1 通り，C から A まで行く最短経路のとり方は，→3 個，↑3 個の並べ方と一致するから，$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$ 通りある.

←同じものを含む順列

よって，求める場合の数 $n(\mathrm{C})$ は

$$n(\mathrm{C}) = 1 \times 20 = \underset{\text{ヘ}}{\boxed{\mathbf{20}}}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 辺 BC 上の少なくとも 1 つの点を通って G から A まで行く最短経路は，面 BCGF と面 ABCD を通る最短経路であり，2 面を右のように展開し，G から A まで行く最短経路を考えればよい.



←平面上で考えるようにする.

←3 個，↑6 個の並べ方と一致するから，求める場合の数 $n(\mathrm{BC})$ は

$$\begin{aligned} n(\mathrm{BC}) &= \frac{9!}{3!6!} \\ &= \underset{\text{ホ}}{\boxed{\mathbf{84}}}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 辺 CD 上の少なくとも 1 つの点を通る最短経路は，(2) と同様にして 84 通りある．点 C は 2 辺 BC，CD の共通部分であることに注意すると，求める最短経路の総数 $n(\mathrm{BC} \cup \mathrm{CD})$ は

$$\begin{aligned} n(\mathrm{BC} \cup \mathrm{CD}) &= n(\mathrm{BC}) + n(\mathrm{CD}) - n(\mathrm{C}) \\ &= 84 + 84 - 20 \\ &= \underset{\text{マ}}{\boxed{\mathbf{148}}}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

←加法定理

(4) 辺 EF もしくは辺 EH 上の少なくとも 1 つの点を通る最短経路の総数 $n(\mathrm{FE} \cup \mathrm{EH})$ は，(3) と同様にして

$$\begin{aligned} n(\mathrm{FE} \cup \mathrm{EH}) &= n(\mathrm{EF}) + n(\mathrm{EH}) - n(\mathrm{E}) \\ &= 84 + 84 - 20 \\ &= \underset{\text{ミ}}{\boxed{\mathbf{148}}}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(5) 辺 BF，DH 上の少なくとも 1 つの点を通る最短経路はどちらも (2) と同様にして 84 通り，B，D，F，H を通る最短経路はいずれも 20 通りある.

←(3)，(4) 以外の G から A まで行く最短経路を探る.

(3)，(4) から，求める場合の数は

$$\begin{aligned} &n(\mathrm{BC} \cup \mathrm{CD}) + n(\mathrm{FE} \cup \mathrm{EH}) + n(\mathrm{BF}) + n(\mathrm{DH}) \\ &\qquad - (n(\mathrm{B}) + n(\mathrm{F}) + n(\mathrm{D}) + n(\mathrm{H})) \\ =&148 + 148 + 84 + 84 - 20 \times 4 \\ =&\underset{\text{ム}}{\boxed{\mathbf{384}}}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

- (3)，(4) の両方に含まれる最短経路は，2 つの折れ線 GFBA，GHDA であり，

$$\begin{aligned} & n\big((\mathrm{BC}\cup\mathrm{CD})\cup(\mathrm{FE}\cup\mathrm{EH})\big) \\ =& n(\mathrm{BC}\cup\mathrm{CD})+n(\mathrm{FE}\cup\mathrm{EH}) \\ & \quad -n\big((\mathrm{BC}\cup\mathrm{CD})\cap(\mathrm{FE}\cup\mathrm{EH})\big) \\ =& 148+148-2=294 \ (\text{通り}) \end{aligned}$$

←— 加法定理

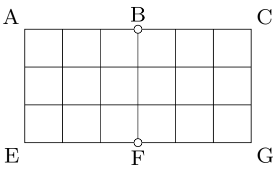
(3)，(4) の両方に含まれない最短経路については

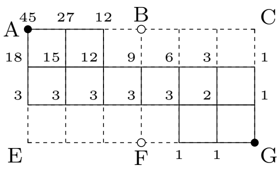
(i) B，F を除いた辺 BF 上の少なくとも 1 点を通って G から A まで行く

(ii) D，H を除いた辺 DH 上の少なくとも 1 点を通って G から A まで行く

の 2 通りがある．

(i) について；B，F を除くと下左図の経路となるが，G から A の最短経路となるのは，下右図の経路を通るときである．これは和の法則を用いて数えると 45 通りある．





←— 直接数え上げるのがはやい.

(ii) について；(i) と同じく，45 通りある．

(i)，(ii) 合わせると

$$45+45=90 \ (\text{通り})$$

よって，求める総数は

$$294+90=384 \ (\text{通り})$$