

7個の数字 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5 の中から 5 個の数字を選んで 1 列に並べ、5 桁の数を作る。

(1) 5 桁の数は全部で 通りできる。これらの 5 桁の数を小さい方から順に並べたとき、23145 は 番目の数である。

(2) 同じ数字が隣り合わないような 5 桁の数は全部で 通りできる。

(13 北里大 薬 4)

ソ	タ	チ
690	229	444

解答は次のページにあります。

【チェック・チェック】

(1) 5桁の数を小さい方から並べていくと最小数は11234で、最大数は55432です。

$$1 \square\square\square\square, 21 \square\square\square, \dots$$

といったタイプの数が何個あるのか、23145に辿り着くまで順次数えていきましょう。このとき、同じ数字1, 1, 5, 5があるのがクセモノです。5個の数字の中に同じ数字があるか否か、同じ数字があるときそれは1組なのか、2組なのかといった場合分けが必要です。

(2) 全体から同じ数字が隣り合うものを除きましょう。

【解答】

(1) 5個の数字を選ぶときの同じ数字の組の個数で場合分けする。

(i) 同じ数字が含まれていないとき

選ばれる数字は1, 2, 3, 4, 5であり、5桁の数は

$$5! = 120 \text{ (通り)}$$

(ii) 同じ数字が1組だけ含まれているとき

同じ数字の組の取り方は2通りあり、他の3個の数字の選び方は ${}_4C_3$ 通りあるから、5桁の数は

$$2 \cdot {}_4C_3 \times \frac{5!}{2!} = 480 \text{ (通り)}$$

(iii) 同じ数字が2組とも含まれているとき

他の1個の数字の選び方は ${}_3C_1$ 通りあるから、5桁の数は

$${}_3C_1 \times \frac{5!}{2!2!} = 90 \text{ (通り)}$$

(i), (ii), (iii) より、5桁の数は全部で

$$120 + 480 + 90 = \mathbf{690} \text{ (通り)} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

これらの5桁の数を小さい方から順に並べたとき

(a) 1□□□□となる数について

下4桁に同じ数字5, 5が含まれていないものは

$${}_5P_4 = 120 \text{ (個)}$$

下4桁に同じ数字5, 5が含まれているものは

$${}_4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 6 \times 12 = 72 \text{ (個)}$$

(b) 21□□□となる数について

下3桁に同じ数字5, 5が含まれていないものは

$${}_4P_3 = 24 \text{ (個)}$$

下3桁に同じ数字5, 5が含まれているものは

$${}_3C_1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 3 = 9 \text{ (個)}$$

(c) 21□□□の後には

$$23114, 23115, 23141, 23145, \dots$$

と並ぶから23145は初めから数えて

$$(120 + 72) + (24 + 9) + 4 = \mathbf{229} \text{ (番目)} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

の数である。

← 場合分けの基準を明確にしておく。

← 同じものを含む順列

← 数字5を1回使うことはできる。

← 数字5を1回使うことはできる。

(2) (1) の (i), (ii), (iii) から同じ数字が隣り合うものを除く.

(i) は同じ数字が隣り合うことはない.

(ii) の 480 通りのうち同じ数字が隣り合っているものは、同じ 2 数字を 1 つの数字とみなすと

$$2 \cdot {}_4C_3 \cdot 4! = 192 \text{ (通り)}$$

(iii) の 90 通りのうち 1, 1 が隣り合っているものは、この 2 数字を 1 つの数字とみなして

$${}_3C_1 \cdot \frac{4!}{2!} = 36 \text{ (通り)}$$

同様にして 5, 5 が隣り合っているものも 36 通りある. さらに、この 90 通りのうち 1, 1 も 5, 5 も隣り合っているものは、それぞれ 1 数字とみなすと

$${}_3C_1 \cdot 3! = 18 \text{ (通り)}$$

ある. したがって (iii) で同じ数字が 1 組以上隣り合っているものは

$$36 + 36 - 18 = 54 \text{ (通り)}$$

以上から、同じ数字が隣り合わない 5 桁の数は

$$690 - (192 + 54) = 444 \text{ (通り)} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow n(A \cup B) \\ = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$