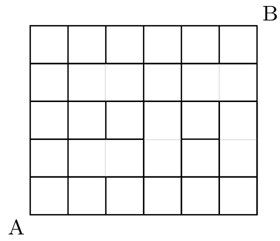
A から B へ行く最短経路の総数を求めよ．



(13 奈良県医大 医 3)

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

関所を設けるという手もありますが，和の法則を使いながら，数え上げていけばよいでしょう．

【解答】

A から B へ行く最短経路となるのは，

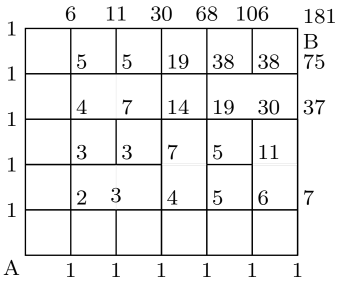
$\rightarrow$ 方向の移動 6 回と，
$\uparrow$ 方向の移動 5 回

を行うときである．

和の法則を用いながら，各交差点までの経路の総数を数えていくと右図となる．

求める総数は **181** 通り

……(答)



⟵ チェクリピ 最短経路

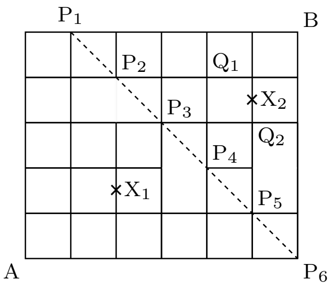
⟵ 最短経路を進むことより，一度進んだ方向を逆向きに進むことはない．

⟵ 泥臭そうだが通行止めなどの条件が多くなってくると「数え上げ」が一番はやい．

(別解) 関所を設けて最短経路の総数を数える．

A から B へ行くには右図の P_1 ～P_6 のいずれかを通る．これらを 2 つ以上通ることはない．A から P_k $(1 \leqq k \leqq 6)$ を通って B に行く最短経路の数を $n(\mathrm{P}_k)$ とおく．

⟵ P_1～P_6 が関所にあたる．



(i) $n(\mathrm{P}_1) = \dfrac{6!}{1!5!} \times 1^5$

$= 6$ (通り)

(ii) $n(\mathrm{P}_2) = \dfrac{5!}{1!4!} \cdot 1 \times \dfrac{5!}{4!1!}$

$= 25$ (通り)

(iii) $n(\mathrm{P}_3)$ について

通行止めの X_1，X_2 を通行可能とする．A から P_3 と進む最短経路の総数から，A から X_1 を通り P_3 と進む最短経路の総数を除くと

⟵ 余分なものは除く

$$\frac{6!}{3!3!} - \frac{3!}{2!1!} \times 1 \times \frac{2!}{1!1!} = 20 - 6 = 14 \text{ (通り)}$$

P_3 から B と進む最短経路の総数から，P_3 から X_2 を通り B と進む最短経路の総数を除くと

⟵ 余分なものは除く

$$\frac{5!}{3!2!} - 1^2 \times 1 \times \frac{2!}{1!1!} = 10 - 2 = 8 \text{ (通り)}$$

よって，

$$n(\mathrm{P}_3) = 14 \times 8 = 112 \text{ (通り)}$$

(iv) $n(\mathrm{P}_4)$ について

P_4 から B への最短経路は Q_1，Q_2 のいずれかを通る．

$$n(\mathrm{P}_4) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 1 \times \left(1^2 \times \frac{3!}{2!1!} + \frac{2!}{1!1!} \cdot 1^3\right)$$
$$= 5 \times (3 + 2) = 25 \text{ (通り)}$$

(v) $n(\mathrm{P}_5) = \dfrac{6!}{5!1!} \times 2 \cdot 1^2 = 12$ (通り)

(vi) $n(\mathrm{P}_6) = 1^6 \times 1^5 = 1$ (通り)

よって，求める総数は

$$n(\mathrm{P}_1) + n(\mathrm{P}_2) + n(\mathrm{P}_3) + n(\mathrm{P}_4) + n(\mathrm{P}_5) + n(\mathrm{P}_6)$$
$$= 6 + 25 + 112 + 25 + 12 + 1$$
$$= 181 \text{ (通り)}$$

⟵ 和の法則