正八角形の 8 つの頂点から 3 つを選んで三角形を作る．次の問いに答えよ．

(1) 三角形の総数を求めよ．

(2) 直角三角形の総数を求めよ．

(3) 鋭角三角形の総数を求めよ．

(13 広島工大 IA 2)

(1) 56
(2) 24
(3) 8

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

三角形は 3 つの頂点または 2 つの辺が指定されると決まります.

一般の三角形は 8 個の中から 3 点を選べばよいのですが，直角三角形となると最大辺 (斜辺) が外接円の直径となることに着目します．鋭角三角形の個数は (1) から (2) と鈍角三角形の個数の和を除けばよいですね.

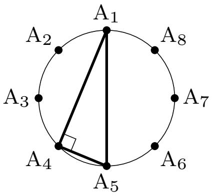
【解答】

(1) 3 つの頂点を選べば 1 つの三角形ができるから，三角形の総数 T は

$$T = {}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{56}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 三角形 (triangle)

(2) 直角三角形となるのは最大辺が外接円の直径となるときであり，直径は 4 本ある．各々の直径に対して，直径の両端以外の 6 点から 1 点を選び，直径の両端と結ぶと 1 つの直角三角形ができる．直角三角形の総数 R は

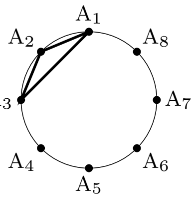


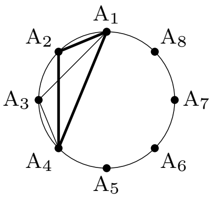
$$R = 4 \times 6 = \mathbf{24}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 最大辺に着目

⟵ 直角三角形 (right triangle)

(3) まず，鈍角三角形の総数 O を数える.





⟵ 鈍角三角形 (obtuse triangle)

最大辺の長さが A_1A_3 の長さと一致する鈍角三角形は 1 通りあり，最大辺の選び方は 8 通りある.

最大辺の長さが A_1A_4 の長さと一致する鈍角三角形は 2 通りあり，最大辺の選び方は 8 通りある.

$$O = 8 + 2 \times 8 = 24\ (\text{個})$$

よって，鋭角三角形の総数は

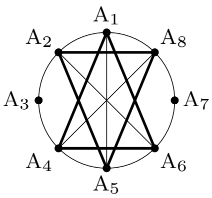
$$T - (R + O) = 56 - (24 + 24) = \mathbf{8}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 鋭角三角形 (acute triangle)

- 鈍角三角形 ABC について，角 B を鈍角，A，B，C はこの順に反時計回りに並んでいるとする．頂点 A を固定し，A を通る外接円の直径を考えると，他の 2 頂点 B，C は半円の一方にある 3 個の点のうちの 2 点となる．A のとり方は 8 通り，A に対する B，C のとり方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあるから，鈍角三角形の総数 O は

$$O = 8 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 24\ (\text{個})$$

- 対角線 3 本を選ぶとき，対角線の両端である 6 点の中から 3 点を選んで鋭角三角形がつくられるのは
  - 対角線の両端を 2 頂点とすることはない
  - 1 つの頂点を端点とする対角線に対して他の 2 頂点は反対側にある



ことに注意すると，対角線 3 本に対して鋭角三角形は 2 個できるから

$${}_4\mathrm{C}_3 \times 2 = 4 \times 2 = 8\ (\text{個})$$