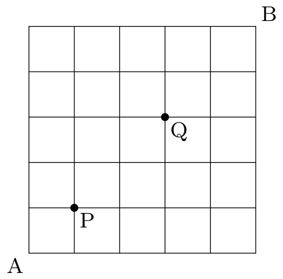
次の $\boxed{}$ にあてはまる答を解答欄 (省略) に記入しなさい.

右図のような正方形をした格子状の道がある.



(1) A 地点から B 地点まで行く最短経路は $\boxed{\textbf{a}}$ 通りである.

(2) A 地点から B 地点まで行く最短経路の中で，P 地点を通るものは $\boxed{\textbf{b}}$ 通りであり，Q 地点を通るものは $\boxed{\textbf{c}}$ 通りである.

(3) A 地点から B 地点まで行く最短経路の中で，P 地点と Q 地点を通るものは $\boxed{\textbf{d}}$ 通りである.

(4) A 地点から B 地点まで行く最短経路の中で，P 地点も Q 地点も通らないものは $\boxed{\textbf{e}}$ 通りである

(13 明治薬大 2)

a	**b**	**c**	**d**	**e**
252	140	120	72	64

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

最短経路を数えているので一度進んだ方向に戻ることはありません．すなわち，右 (北) への移動が 5 回，上 (東) への移動が 5 回あり，この移動の順序が何通りあるかという問題になります．

A 地点から B 地点まで行く最短経路の中で，X 地点を通るものの総数を $n(\mathrm{X})$ とおくと，(4) は

$$n(\overline{\mathrm{P}} \cap \overline{\mathrm{Q}})$$

を求めており，(1)，(2)，(3) はすべてが (4) の準備になっています．

【解答】

(1) 右への移動を ”→”，上への移動を ”↑” で表すと，A 地点から B 地点まで行く最短経路は，”→” 5 個と ”↑” 5 個の順列と 1 対 1 に対応するから，求める数を $n(\Omega)$ とおくと

←― チェクリピ 最短経路

$$n(\Omega) = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \mathbf{252} \text{ (通り)} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

←― 同じものを含む順列

- 10 個の場所から ”→” 5 個の場所を決める (残りは ”↑” 5 個となる) と考えて

$$ {}_{10}\mathrm{C}_5 = \frac{10!}{5!5!}$$

としてもよい．

(2) (1) と同様に考えると，最短経路は A 地点から P 地点までが $\frac{2!}{1!1!}$ (通り)，P 地点から B 地点までが $\frac{8!}{4!4!}$ (通り) あるから，P 地点を通る最短経路の数 $n(\mathrm{P})$ は

$$\begin{aligned} n(\mathrm{P}) &= \frac{2!}{1!1!} \times \frac{8!}{4!4!} \\ &= 2 \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \mathbf{140} \text{ (通り)} \end{aligned} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

同様に考えると，Q 地点を通る最短経路の数 $n(\mathrm{Q})$ は

$$\begin{aligned} n(\mathrm{Q}) &= \frac{6!}{3!3!} \times \frac{4!}{2!2!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \times \frac{4 \cdot 3}{2} = \mathbf{120} \text{ (通り)} \end{aligned} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3) (2) と同様に考えると，P 地点と Q 地点を通る最短経路の数 $n(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})$ は

$$\begin{aligned} n(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}) &= \frac{2!}{1!1!} \times \frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{2!2!} \\ &= 2 \times \frac{4 \cdot 3}{2} \times \frac{4 \cdot 3}{2} = \mathbf{72} \text{ (通り)} \end{aligned} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(4) A 地点から B 地点まで行く最短経路のうち，P 地点も Q 地点も通らない最短経路の数 $n(\overline{\mathrm{P}} \cap \overline{\mathrm{Q}})$ は，

$$\begin{aligned} n(\overline{\mathrm{P}} \cap \overline{\mathrm{Q}}) &= n(\overline{\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}}) && \text{←― ド・モルガンの法則} \\ &= n(\Omega) - n(\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}) \\ &= 252 - \{n(\mathrm{P}) + n(\mathrm{Q}) - n(\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})\} && \text{←― 加法定理} \\ &= 252 - (140 + 120 - 72) \\ &= \mathbf{64} \text{ (通り)} && \cdots\cdots \text{(答)} \end{aligned}$$