$a+b+c=9$ を満たす正の整数 $a,\ b,\ c$ の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか.

(13 昭和大 歯・薬 2(2))

28 通り

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

コツコツ数える手もありますが，組合せの総数に帰着させたいものです．
球 9 個，仕切り棒 2 本の並べ方に言い換えることはできますか．

【解答】

$x+y+z=9$ を満たす正の整数解の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は，球 9 個を 1 列に並べたときにできるすき間 8ヶ所に仕切り棒 2 本を 1 本ずつ入れる入れ方の総数に等しい．

←― チェクリピ 246
←― 整数解の組は球と球の間に入れる仕切り棒の入れ方に対応する．
この対応付けの考え方に慣れておこう．

(例えば，$(2,\ 2,\ 5) \longleftrightarrow$ ○○|○○|○○○○○ として対応する)．
よって，求める個数は

$$ {}_8\mathrm{C}_2 = \frac{8\cdot 7}{2} = \mathbf{28}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

- 与えられた条件は

$$ \begin{cases} a+b+c=9 \\ a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1 \end{cases} $$

であり，

$$ 1 \leqq a < a+b < a+b+c = 9 $$

である．この不等式を満たす $a,\ a+b$ の値が決まれば，整数の組 $(a,\ b,\ c)$ が決まる．$1 \leqq a < a+b \leqq 8$ より，求める個数は

$$ {}_8\mathrm{C}_2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28\ (\text{個}) $$

←― 1 から 8 の中から 2 個の数字を選び，
小さい方を a，
大きい方を $a+b$
とする．

- 与えられた条件は

$$ \begin{cases} a+b+c=9 \\ a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1 \end{cases} $$

$$ \Longleftrightarrow \begin{cases} (a-1)+(b-1)+(c-1)=6 \\ a-1 \geqq 0,\ b-1 \geqq 0,\ c-1 \geqq 0 \end{cases} $$

であり，$A=a-1,\ B=b-1,\ C=c-1$ とおくと

←― この置き換えは覚えておこう．

$$ \begin{cases} A+B+C=6 \\ A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\ (*) $$

と変形される．$(*)$ を満たす整数の組 $(A,\ B,\ C)$ の個数を数えればよい．これは球 6 個と仕切り棒 2 本の順列の総数に等しい．
(例えば，

$(2,\ 2,\ 2) \longleftrightarrow$ ○○|○○|○○
$(2,\ 0,\ 4) \longleftrightarrow$ ○○||○○○○
$(0,\ 0,\ 6) \longleftrightarrow$ ||○○○○○○

として対応する)．
よって，求める個数は

$$ \frac{8!}{6!2!} = \mathbf{28}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

- $(*)$ を満たす整数の組 $(A,\ B,\ C)$ の個数は，3 種類のものの中から重複を許して 6 個取る (重複組合せ) とり方の総数と一致するから

$$ {}_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = \frac{8!}{6!2!} = 28\ (\text{個}) $$

重複組合せの H は “homogeneous (同次)” の頭文字

- c を $1 \leqq z \leqq 7$ の範囲で固定すると，$a+b=9-c$ であり，整数解の組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=(1,\ 8-c),\ (2,\ 7-c),\ \cdots,\ (8-c,\ 1)$$

の $8-c$ 個ある．よって，求める整数解の組は

$$\sum_{c=1}^{7}(8-c)=7+6+\cdots+2+1$$

$$=\frac{7(7+1)}{2}=28\ (個)$$

$\longleftarrow$ 1 つを固定して (c を固定して) コツコツ数える．