　$x+y+z=8$ を満たす負でない整数解の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数はいくつあるか求めなさい.

(13 流通経済大)

45 個

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

$x+y+z=r$ をみたす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は，異なる 3 種類の球がそれぞれ十分あって，何度同じ種類の球をとってもよいとして，合計 r 個をとるとり方の総数に一致します．

このとり方は重複組合せよばれ，取り方の総数は

$${}_3\mathrm{H}_r = {}_{3+(r-1)}\mathrm{C}_r$$

として公式化されます．証明は r 個の球と仕切り棒 2 本の並べ方を考えればよいですね．

【解答】

$x+y+z=8$ を満たす負でない整数解の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は，球 8 個，仕切り棒 2 本の順列の総数に等しい．

(例えば，

$(2,\ 2,\ 4) \longleftrightarrow$ ○○｜○○｜○○○○

$(2,\ 0,\ 6) \longleftrightarrow$ ○○｜｜○○○○○○

$(0,\ 0,\ 8) \longleftrightarrow$ ｜｜○○○○○○○○

として対応する)．

よって，求める個数は

$$\frac{10!}{8!2!} = \mathbf{45}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 整数解の組の個数は，3 種類のものの中から重複を許して 8 個取る (重複組合せ) とり方の総数と一致するから

$${}_3\mathrm{H}_8 = {}_{3+8-1}\mathrm{C}_8 = \frac{10!}{8!2!} = 45\ (\text{個})$$

- z を $0 \leqq z \leqq 8$ の範囲で固定すると，$x+y=8-z$ であり，整数解の組 $(x,\ y)$ は

$$(x,\ y) = (0,\ 8-z),\ (1,\ 7-z),\ \cdots,\ (8-z,\ 0)$$

の $9-z$ 個ある．よって，求める整数解の組の個数は

$$\sum_{z=0}^{8}(9-z) = 9+8+\cdots+2+1 = \frac{9(9+1)}{2} = 45\ (\text{個})$$

←― チェクリピ 246

←― 整数解の組は球と仕切り棒の順列に対応する．
この対応付けの考え方に慣れておこう．

←― 重複組合せの H は “homogeneous (同次)” の頭文字

←― 1 つを固定して (z を固定して) コツコツ数える．