x, y, z を 0 以上の整数とする.

(1) $x+y \leqq 4$ をみたす $(x,\ y)$ の個数を求めよ.
(2) n を自然数とするとき, $x+y \leqq n$ をみたす $(x,\ y)$ の個数を求めよ.
(3) n を自然数とするとき, $x+y+z \leqq n$ をみたす $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ.

(13 玉川大)

(1) 15 個
(2) $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 個
(3) $\dfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ 個

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

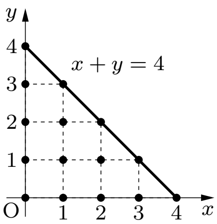
(1)(2) は格子点の個数に帰着できます．(3) は z を固定すると (2) が利用できます．
　あるいは，適当に文字を補うと，$\leqq$ を $=$ にすることができます．このときは重複組合せの問題となります．

【解答】

(1) 求める個数は，右図の格子点 ● の個数に等しいから

$$1+2+3+4+5=\mathbf{15}\text{個} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\longleftarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$



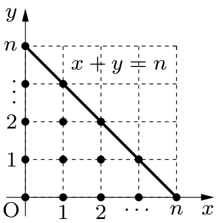
● 求める個数は，$x+y+z=4$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の個数と一致するから

$\longleftarrow$ $x+y\leqq 4$ より，
$z=4-(x+y)$ とおくと
$z\geqq 0$ である．

$$_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15\ (\text{個})$$

(2) (1) と同様に，右図の ● の個数を数えて，

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+(n+1)\\ =&\boldsymbol{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}\text{個} \quad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$



● 下三角形と対角線部分に分けて格子点の個数を求める．

$$\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\ (\text{個})$$

$\displaystyle\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\text{正方形から対角線上}\\ \text{の格子点を除く}\end{array}\right)$
$+$(対角線上の格子点)

● 求める個数は，$x+y+z=n$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の個数と一致するから

$\longleftarrow$ $x+y\leqq n$ より，
$z=n-(x+y)$ とおくと
$z\geqq 0$ である．

$$_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2}\ (\text{個})$$

(3) $z=k$ $(0\leqq k\leqq n)$ と固定すると，$x+y+k\leqq n$ より，$x+y\leqq n-k$ である．これを満たす $(x,\ y)$ は，(2) より $\dfrac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2)$ 個ある．求める個数は，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+2)\\ =&\frac{1}{2}\{(n+1)(n+2)+n(n+1)+\cdots+2\cdot 3+1\cdot 2\}\\ =&\frac{1}{2}\{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n+1)(n+2)\}\\ =&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} j(j+1)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}\\ =&\boldsymbol{\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)}\ (\text{個}) \quad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 和を書き並べてみる．

$\longleftarrow$ $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}(j^2+j)$ として
計算してもよい．

● $x+y+z\leqq n$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の個数は，$x+y+z+w=n$ を満たす負でない整数 x，y，z，w の組の個数に一致するから

$\longleftarrow$ $x+y+z\leqq n$ より，
$w=n-(x+y+z)$ とおくと
$w\geqq 0$ である．

$$_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n=\frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)\ \text{個}$$