水，お茶，スポーツドリンクの 3 種類の飲み物を売っている自動販売機で，6 本の飲み物を購入する．購入しない飲み物があってもよいものとすると，購入の組合せは $\boxed{\text{ア}}$ 通りある．

一方，3 種類の飲み物をそれぞれ少なくとも 1 本は購入しなければならないものとすると，購入の組合せは $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．

今，袋の中に水，お茶，スポーツドリンクの 3 種類の飲み物がそれぞれ 3 本ずつ，合計 9 本が入っており，この中から 3 本を取り出す．取り出さない飲み物の種類があってもよいものとすると，取り出す組合せは $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．

ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ は整数で解答すること．

(13 立命館大 文系)

ア	イ	ウ
28	10	10

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

$a+b+c=6$ を満たす整数解の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めています．さらに

$\boxed{\text{ア}}$ には，　$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0,$

$\boxed{\text{イ}}$ には，　$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

という条件がつきます．

【解答】

(ア) 3 種類の飲み物から，重複を許して 6 本取る組合せの総数であるから

$$ {}_3\mathrm{H}_6 = {}_{3+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = \frac{8\cdot 7}{2} = \underset{\text{ア}}{\boxed{\mathbf{28}}}\ (\text{通り}) $$

← $\begin{cases} a+b+c=6 \\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \end{cases}$
チェクリピ 246

(イ) まず，3 種類の飲み物を 1 本ずつ購入する．残りの 3 本に対しては，3 種類の飲み物から，重複を許して 3 本取る組合せの総数であるから

$$ {}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\cdot 4}{2} = \underset{\text{イ}}{\boxed{\mathbf{10}}}\ (\text{通り}) $$

題意は
$\begin{cases} a+b+c=6 \\ a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1 \end{cases}$
であるが，
$A=a-1,\ B=b-1,$
$C=c-1$
とおくと
$\begin{cases} A+B+C=3 \\ A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0 \end{cases}$

(ウ) 取り出される飲み物の種類の数により場合分けすると

1 種類のとき，取り出す組合せは　3 通り
2 種類のとき，取り出す組合せは　${}_3\mathrm{C}_2 \cdot 2$ 通り
3 種類のとき，取り出す組合せば　1 通り

よって，求める場合の数は

$$ 3 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot 2 + 1 = 3+6+1 = \underset{\text{ウ}}{\boxed{\mathbf{10}}}\ (\text{通り}) $$

- 求める組合せの総数は

$$ \begin{cases} a+b+c=3 \\ 0 \leqq a \leqq 3,\ 0 \leqq b \leqq 3,\ 0 \leqq c \leqq 3 \end{cases} $$

を満たす整数の組の個数と一致する．これは

$$ \begin{cases} a+b+c=3 \\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \end{cases} $$

を満たす整数の組の個数と一致するから，求める総数は

$$ {}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\cdot 4}{2} = 10\ (\text{通り}) $$

⟵ 重複組合せ