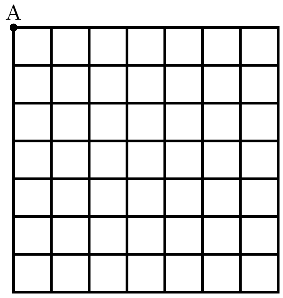
図のように，8 本の平行な線分と，それらと垂直に交わる 8 本の平行な線分が，それぞれ長さ 1 の間隔で並んでいる．これらの線分のうち 4 本で囲まれる四角形について，次の問 (1)〜(5) に答えよ．解答は解答用紙 (省略) の所定欄に記入せよ．



(1) 一辺の長さが 6 の正方形の個数を求めよ．
(2) 一辺の長さが 5 の正方形の個数を求めよ．
(3) すべての正方形の個数を求めよ．
(4) すべての長方形のうち正方形でないものの個数を求めよ．
(5) 正方形でない長方形のうち，図の点 A を含まないものの個数を求めよ．

(13 立教大 経済・観光・福祉 3)

(1) 4
(2) 9
(3) 140
(4) 644
(5) 602

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

縦，横 2 本ずつ線分を選べば，1 つの長方形ができます.

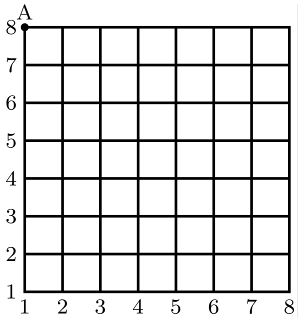
(1)(2) は (3) の準備です.

(4) 正方形は縦横の長さが一致する長方形なので，長方形の全体から正方形を除きます.

(5) 捻りを入れた問題になっていますが，(4) で正方形でない長方形を数えているので，(4) の長方形全体から点 A を含む正方形でない長方形を除けばよいですね.

【解答】

縦の線分，横の線分それぞれに 1〜8 の名前をつける.　← チェクリピ 241



(1) 一辺の長さが 6 の正方形がつくられるのは

縦の線分の組 $\{1,\ 7\}$, $\{2,\ 8\}$ のどちらかと，

横の線分の組 $\{1,\ 7\}$, $\{2,\ 8\}$ のどちらか

の合わせて 4 本の線分を選んだときである．求める個数は

$$2 \times 2 = \mathbf{4}\ (個)$$ ……(答)　← 積の法則

(2) 一辺の長さが 5 の正方形がつくられるのは

縦の線分の組 $\{1,\ 6\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{3,\ 8\}$ のいずれかと，

横の線分の組 $\{1,\ 6\}$, $\{2,\ 7\}$, $\{3,\ 8\}$ のいずれか

の合わせて 4 本の線分を選んだときである．求める個数は

$$3 \times 3 = \mathbf{9}\ (個)$$ ……(答)　← 積の法則

(3) 一辺の長さが k $(1 \leqq k \leqq 7)$ の正方形がつくられる場合の数は縦の線分の組の選び方が

$$\{1,\ k+1\},\ \{2,\ k+2\},\ \cdots,\ \{8-k,\ 8\} \text{ の } 8-k \text{ 通り}$$

横の線分の組の選び方も同じく $8-k$ 通りあるから

$$(8-k) \times (8-k) = (8-k)^2 \text{ 通り}$$　← (1)，(2) の一般化

ある．求める個数は

$$\sum_{k=1}^{7}(8-k)^2 = 7^2 + 6^2 + \cdots + 1^2$$　← 正方形の一辺の長さは 1，2，3…，7 の 7 通りがある.

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = \mathbf{140}\ (個)$$ ……(答)

(4) 正方形も含めた長方形のつくり方は

$${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_8\mathrm{C}_2 = \left(\frac{8 \cdot 7}{2}\right)^2 = 784\ (個)$$

よって，すべての長方形のうち正方形でないものの個数は

$$784 - 140 = \mathbf{644}\ (個)$$ ……(答)　← 長方形の全体から正方形を除く.

(5) (4) から点 A を含む正方形でない長方形を除く.

点 A を含む長方形 (正方形も含む) の個数は

$${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_1 = 7^2 = 49\ (個)$$

であり，点 A を含む正方形の個数は 7 個であるから，正方形でない長方形のうち，点 A を含まないものは

$$644 - (49 - 7) = \mathbf{602}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$