

xy 平面上に六角形 OPQRST があり、点 O, P, Q, R, S, T の座標はそれぞれ $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(n+1, 1)$, $(n+1, n+1)$, $(1, n+1)$, $(0, n)$ である。六角形の周上にある格子点を 2 点以上含む互いに異なる直線の本数を P_n とする。 $n=3$ の P_3 本の場合のうち、互いに平行でないものの最大数は $\boxed{\text{(エ)}}$ 本である。また、一般に $P_n = \boxed{\text{(オ)}}$ である。ただし、 n は自然数であり、格子点とは、 x 座標、 y 座標が共に整数となる点のことをいう。

(13 芝浦工大 2 月 2 日 1(2))

【答】

| (エ) | (オ) |
|-----|-----------------|
| 22 | $6n^2 + 4n + 5$ |

【チェック・チェック】

まず、六角形をかいてみましょう。 $n = 3$ のときの六角形には周上に格子点が 14 個あります。その中の 2 点を結ぶと 1 本の直線が引けるのですが、「互いに平行でない」という条件がついているので異なる傾きをもつ直線を数えることになります。傾きに注目しましょう。(x の増分) $= 0, 1, 2, 3, 4$ で場合分けしながら「モレなく、ダブリなく」数えていきます。

また、後半は 2 直線が一致しなければ、同じ傾きをもつ直線であっても「異なる直線」であることに注意します。異なる 2 点の選び方の総数から一致する直線の数数を除きます。

【解答】

$n = 3$ のとき、六角形 OPQRST は右図となる。六角形の周上にある格子点を結んでできる直線の傾き m を考える。 x の増分を $\Delta x (\geq 0)$ とすると

$$\Delta x = 0, 1, 2, 3, 4$$

のいずれかである。

(i) $\Delta x = 0$ のとき、2 点を結ぶ直線は

y 軸と平行な直線である。

(ii) $\Delta x = 1$ のとき、 y の増分を Δy とすると

$\Delta y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ であり

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

(iii) $\Delta x = 2$ のとき、 $\Delta y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ であり

$$m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$$

(iv) $\Delta x = 3$ のとき、 $\Delta y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4$ であり

$$m = 0, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm 1, \frac{4}{3}$$

(v) $\Delta x = 4$ のとき、 $\Delta y = 0, \pm 1, \pm 2, 3, 4$ であり

$$m = 0, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$$

である。(i)~(v) より、互いに平行でない直線は

y 軸と平行な直線

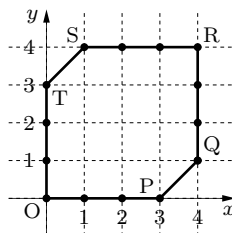
または

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \\ \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

のものである。すなわち、 P_3 のうち互いに平行でないものの最大数は **22** 本である。 ……(答)

また、六角形 OPQRST の周上の格子点は $2(n+1) + 2n = 4n + 2$ 個、 x 軸または y 軸に平行な辺上の格子点は $n + 1$ 個あるから、互いに異なる直線の本数 P_n は

$$P_n = {}_{4n+2}C_2 - ({}_{n+1}C_2 - 1) \times 4 \\ = (2n+1)(4n+1) - 2(n+1)n + 4 \\ = 6n^2 + 4n + 5 \quad \dots\dots(\text{答})$$



← $n = 3$ のときの図をかく。

$$\leftarrow (\text{傾き}) = \frac{y \text{ の増分}}{x \text{ の増分}} \\ = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

← $\Delta y \neq -4$ に注意する。

← $\Delta y \neq -3, -4$ に注意する。

← (i)~(v) の中から、異なる傾きをすべて拾う。

← x 軸または y 軸に平行な辺上の 2 点を結んでできる直線はすべて一致することに注意する。