以下の問いに答えよ．

(1) 式 $(a+b)^6$ を展開したときの a^3b^3 の項の係数を求めよ．

(2) 6 個の引き出しがあり，そのすべてに書類 a と書類 b が 1 部ずつ入っている．書類 a を 4 部と書類 b を 2 部取り出したい．

(i) 1 個の引き出しから，書類 a または書類 b のどちらかしか取り出せないとき，取り出し方は何通りあるか．

(ii) 1 個の引き出しから，書類 a と書類 b の両方を取り出してもよいし，片方のみを取り出してもよいし，どちらも取り出さなくてもよいとき取り出し方は何通りあるか．

(3) 設問 (2)(ii) における書類の取り出し方の場合の数は式

$$(ab+a+b+1)^6$$

を展開したときの a^4b^2 の項の係数に等しくなる．その理由をのべよ．

(13 岩手大 人文社会科学部 [1])

(1) 20
(2) (i) 15 通り　(ii) 225 通り
(3) 略

【チェック・チェック】

(1) は公式の確認であり，点取り問題．

(2) は組合せ．(ii) は (3) を前提に求めることもできます．このときは多項定理の知識が必要となります．

(3) が光っていますね．結果を求めることが数学だと思っている人にはツライかもしれません．この手の問題が面白いという感性を大切にしたいものです．

【解答】

(1) 二項定理より，$(a+b)^6$ を展開したときの一般項は

$${}_6\mathrm{C}_k a^k b^{6-k} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 6)$$

であり，a^3b^3 の項が現れるのは $k=3$ のときである．よって，a^3b^3 の項の係数は

$${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot} = \mathbf{20} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

←― チェクリピ [5]，[6]

(2) (i) 書類 a が 6 個の引き出しのうちのどの 4 個から取り出されるかが決まれば，書類 b を取り出す 2 個の引き出しは，残り 2 個の引き出しとして 1 通りに決まるから，求める取り出し方は

$${}_6\mathrm{C}_4 = \frac{6\cdot5}{2} = \mathbf{15}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

←― 書類 a を取り出す引き出しの選び方を数える．

(ii) 書類 a，b の取り出し方は独立であり，書類 a を取り出す 4 個の引き出しと書類 b を取り出す 2 個の引き出しが決まればよいから，求める取り出し方は

$${}_6\mathrm{C}_4 \times {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2} \times \frac{6\cdot5}{2} = \mathbf{225}\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

←― 積の法則

(3) 各引き出しには書類 a，b が 1 部ずつ入っているから，k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ 番目の引き出しから書類 a，b を取る，取らないを

$$a^{\alpha_k} = \begin{cases} a^1 & (a\ \text{を取る}) \\ a^0 & (a\ \text{を取らない}) \end{cases} \qquad b^{\beta_k} = \begin{cases} b^1 & (b\ \text{を取る}) \\ b^0 & (b\ \text{を取らない}) \end{cases}$$

で表すと，書類 a を 4 部と書類 b を 2 部取り出すということは

$$a^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_6} = a^4 \ \text{かつ}\ b^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_6} = b^2$$

を満たすということである．各引き出しから

書類 a と書類 b の両方を取り出すことは　$a^1b^1 = ab$

書類 a のみを取り出すことは　$a^1b^0 = a$

書類 b のみを取り出すことは　$a^0b^1 = b$

どちらも取り出さないことは　$a^0b^0 = 1$

←― (2)(ii) の問題文を頂いた．これにより $(ab+a+b+1)^6$ の展開式と結びつく．

で表されるから，(2)(ii) の取り出し方は 4 種類の文字 ab，a，b，1 の中から重複を許して 6 個取ることであり，取った 6 個の文字の積を整理した結果が a^4b^2 となる取り方の総数が求めるものある．これは

$$(ab+a+b+1)^6$$

を展開したときの a^4b^2 の項の係数に等しい．　　……(証明終わり)

- (3) を利用して (2)(ii) の取り出し方を数えてみる．

多項定理より

$$(ab+a+b+1)^6 = \sum \frac{6!}{p!q!r!s!}(ab)^p a^q b^r 1^s$$
$$= \sum \frac{6!}{p!q!r!s!}a^{p+q}b^{p+r}$$

ここでの和は，$p+q+r+s=6,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0,\ s \geqq 0$ を満たす整数の組 $(p,\ q,\ r,\ s)$ についてのすべての和である．

a^4b^2 の項が現れるのは

$$\begin{cases} p+q+r+s=6 \\ p+q=4 \\ p+r=2 \\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0,\ s \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p+(4-p)+(2-p)+s=6 \\ q=4-p \\ r=2-p \\ p \geqq 0,\ 4-p \geqq 0,\ 2-p \geqq 0,\ s \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s=p \\ q=4-p \\ r=2-p \\ 0 \leqq p \leqq 2 \end{cases}$$

$$\iff (p,\ q,\ r,\ s) = (0,\ 4,\ 2,\ 0),\ (1,\ 3,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 0,\ 2)$$

求める取り出し方は

$$\frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{2!2!2!} = 15 + 120 + 90 = 225\ (\text{通り})$$