

$(x + 2)^{13}$ の展開式において、 x の項の係数は $\boxed{\text{ア}}$ である。また、 20^{13} を 18 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$ である。 (13 愛知工大)

【答】

ア	イ
53248	2

【チェック・チェック】

二項定理は

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_ny^n$$

と表すことも

$$(x+y)^n = {}_nC_0y^n + {}_nC_1x^1y^{n-1} + {}_nC_2x^2y^{n-2} + \cdots + {}_nC_nx^n$$

と表すこともできます。使いやすい方を選択しましょう。

設問が2つになっています。どのような繋がりになっているのか考えましょう。

$$20^{13} = (18+2)^{13}$$

とみる事ができれば、これはクリアです。

【解答】

二項定理より

$$(x+2)^{13} = \sum_{k=0}^{13} {}_{13}C_k x^k 2^{13-k}$$

x の項が現れるのは $k=1$ のときであり、 x の項の係数は

$${}_{13}C_1 2^{13-1} = 13 \cdot 4096 = \boxed{53248} \quad \dots\dots (\text{答})$$

また、

$$\begin{aligned} 20^{13} &= (18+2)^{13} \\ &= {}_{13}C_0 \cdot 18^{13} + {}_{13}C_1 \cdot 18^{12} \cdot 2 + \\ &\quad \cdots + {}_{13}C_{12} \cdot 18 \cdot 2^{12} + {}_{13}C_{13} \cdot 2^{13} \\ &= ({}_{13}C_0 \cdot 18^{12} + {}_{13}C_1 \cdot 18^{11} \cdot 2 + \\ &\quad \cdots + {}_{13}C_{12} \cdot 2^{12}) \times 18 + 2^{13} \end{aligned}$$

${}_{13}C_0 \cdot 18^{12} + {}_{13}C_1 \cdot 18^{11} \cdot 2 + \cdots + {}_{13}C_{12} \cdot 2^{12}$ は整数であるから、 20^{13} を18で割った余りは、 2^{13} を18で割った余りに等しい。

$$2^{13} = 8192 = 18 \cdot 455 + 2$$

より、求める余りは $\boxed{2}$ \dots\dots (\text{答})

← 二項定理を $(x+y)^n$ $= \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k y^{n-k}$ とみている。

← チェクリピ7

← 二項定理を $(x+y)^n$ $= \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^{n-k} y^k$ とみている。