n を自然数とする．このとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$$

を求めよ $\boxed{(2)}$.

(13 横浜市大 医 1(2))

【答】

(2)
$\dfrac{4^n-1}{2n+1}$

【チェック・チェック】

二項係数の和ですから，二項定理を利用します．

$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$ において，$\dfrac{1}{2k+2}$ は ${}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}$ とともに変る値であり扱いにくいので，これを定数に変える工夫をします．

あるいは $\dfrac{1}{2k+2}$ が $\displaystyle\int_0^1 x^{2k+1}\,dx = \left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+2}$ であることに気付けば (3 次以上の積分ですからこれは数学 III の範囲となります)，

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2} = \int_0^1 {}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1}\,dx$$

であり，${}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1}$ が現れる式として，$(1+x)^{2n}$ に着目して解くこともできます．

【解答】

$$\begin{aligned}
\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2} &= \frac{1}{2k+2}\cdot\frac{(2n)!}{(2k+1)!\{2n-(2k+1)\}!}\\
&= \frac{(2n)!}{(2k+2)!(2n-2k-1)!}\\
&= \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)!}{(2k+2)!\{(2n+1)-(2k+2)\}!}\\
&= \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}}{2n+1}
\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ ${}_m\mathrm{C}_j = \dfrac{m!}{j!(m-j)!}$
であり，右辺は
$(\text{分母}) = j!(m-j)!$
に対して
$(\text{分子}) = \{j+(m-j)\}!$
である．
したがって，本問の
この式では

(分子)
$= \{(2k+2)+(2n-2k-1)\}!$
$= (2n+1)!$

であれば組合せの式
で表すことができる．

であるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2k+2}}{2n+1}\\
=&\frac{1}{2n+1}\left({}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$(1+x)^{2n+1}$ を二項展開すると

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n+1} = {}&{}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1x + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2x^2 + \cdots\\
&+ {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}x^{2n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1}x^{2n+1}
\end{aligned}$$

$x=1$ とおくと

$$\begin{aligned}
&{}_{2n+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots\\
&\quad + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} = 2^{2n} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

$x=-1$ とおくと

$$\begin{aligned}
&{}_{2n+1}\mathrm{C}_0 - {}_{2n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{2n+1}\mathrm{C}_2x^2 - \cdots\\
&\quad + {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n} - {}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n+1} = 0 \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ ⊕，⊖が交互に現れる．

である．①＋② より

$$2\left({}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-2}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}\right)=2^{2n+1}$$

$$\therefore\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_0+{}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-2}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}=2^{2n}=4^n$$

$$\therefore\ {}_{2n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n-2}+{}_{2n+1}\mathrm{C}_{2n}=4^n-{}_{2n+1}\mathrm{C}_0=4^n-1$$

⟵ ${}_{2n+1}\mathrm{C}_{(偶数)}$ の和をつくることができた.

よって，求める値は

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}=\boldsymbol{\frac{4^n-1}{2n+1}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

- $\displaystyle\int_0^1 x^{2k+1}\,dx=\left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right]_0^1=\frac{1}{2k+2}$ であるから

⟵ 気付くかな.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}\\ =&\sum_{k=0}^{n-1}\left({}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}\int_0^1 x^{2k+1}\right)dx\\ =&\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}x^{2k+1}\right)dx\\ =&\int_0^1\left({}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}\right)dx\end{aligned}$$

⟵ $\sum\int=\int\sum$

ここで，二項定理より

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n}&=1+{}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2+{}_{2n}\mathrm{C}_3x^3+\cdots\\&\qquad+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}x^{2n}\\(1-x)^{2n}&=1-{}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2-{}_{2n}\mathrm{C}_3x^3+\cdots\\&\qquad-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}x^{2n}\end{aligned}$$

であるから，辺々を加えると

$$\begin{aligned}&(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}\\ =&2\left({}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}\right)\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}\\ =&\int_0^1\frac{1}{2}\left\{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}\right\}dx\\ =&\frac{1}{2}\left[\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}+\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\\ =&\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1}+\frac{0-1}{2n+1}\right)\\ =&\frac{2^{2n}-1}{2n+1}=\frac{4^n-1}{2n+1}\end{aligned}$$