$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ を展開したとき，x^3 の項の係数は $\boxed{\text{ア}}$ であり，すべての項の係数の和は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(13 近畿大学 理系)

【答】

ア	イ
-80	1

【チェック・チェック】

二項展開して $2x$, $-\dfrac{1}{x}$ として現れる x をまとめましょう.

すべての項の係数の和というのは，例えば

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

であるならば,

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

のことであり，これは x に 1 を代入した $f(1)$ に他なりません.

【解答】

二項定理より

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_k (2x)^{5-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k$$

←― チェクリピ［5］

$$= \sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-k}(-1)^k x^{5-2k} \qquad \cdots\cdots ①$$

←― x をまとめた.

x^3 の項が現れるのは

$$5 - 2k = 3 \qquad \therefore \quad k = 1$$

のときであり，x^3 の項の係数は

$${}_5\mathrm{C}_1 \cdot 2^{5-1} \cdot (-1)^1 = -5 \cdot 16 = \mathbf{-80} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

すべての項の係数の和は $\sum\limits_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-k}(-1)^k$ であり，これは①の右辺において $x = 1$ としたものである．よって，求める和は

$$\sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-k}(-1)^k = \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{1}\right)^5 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

←― ①の左辺に $x = 1$ を代入して，右辺の和を求める.