1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある．これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う．

(1) 下記の条件 (A) が成り立つ確率を求めよ．
(2) 下記の条件 (B) が成り立つ確率を求めよ．
(3) 条件 (A)，(B) が同時に成り立つ確率を求めよ．

ただし，条件 (A)，(B) は次のとおりである．

(A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない．
(B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある．

(13 千葉大 4)

(1) $\dfrac{7}{9}$
(2) $\dfrac{7}{36}$
(3) $\dfrac{13}{84}$

【チェック・チェック】

「隣り合わない ⋯ は 2 段階操作」で,「隣り合うものは 1 つのみなす」という定番の考え方があります.

【解答】

(1) 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードを 1 列に並べる並べ方は全部で

$9!$ 通り

あり，これらの起こり方は同様に確からしい.

← 同様に確からしい

このうち条件 (A) を満たすカードの列は，番号 1，2 以外のカード 7 枚を 1 列に並べた後，番号 1，2 のカードを両端または隙間に 1 枚ずつ入れて 9 枚のカードの列をつくることにより得られる．この並べ方は

← 2 段階操作で条件を満たす並べ方をつくる.
チェクリピ

$7! \times 8 \cdot 7$ 通り

ある．よって，条件 (A) が成り立つ確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{7! \times 8 \cdot 7}{9!} = \mathbf{\frac{7}{9}} \quad \cdots\cdots (答)$$

- 余事象を考えてもよい.
  番号 1 のカードと番号 2 のカードが隣り合うカードの列は，この 2 枚をセットにして 1 枚とみなし他の 7 枚とともに並べることにより得られる．セット内の順序も考えると，この並べ方は

  ← 隣り合うものは 1 つとみなす

  $2! \times 8!$通り

  ある．よって，条件 (A) が成り立つ確率は

  $$P(A) = 1 - \frac{2! \times 8!}{9!} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

(2) 条件 (B) を満たすカードの列は，番号 8 のカードと番号 9 のカード間に入る 1 枚のカードを選び，この 3 枚のカードをセットにして 1 枚とみなし，他の 6 枚とともに並べることにより得られる．セット内の順序も考えると，この並べ方は

← 隣り合うものは 1 つとみなす

${}_7\mathrm{C}_1 \cdot 2! \times 7!$ 通り

ある．よって，条件 (B) が成り立つ確率は

$$P(B) = \frac{7 \cdot 2 \times 7!}{9!} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 8} = \mathbf{\frac{7}{36}} \quad \cdots\cdots (答)$$

(3) (A)，(B) が同時に成り立つ並べ方を 8 と 9 の間の 1 枚が

← 条件を満たす並べ方を数える.

1 または 2 である場合 $\cdots\cdots (a)$
そうではない場合 $\cdots\cdots (b)$

に分けて数える.

(a) のとき，(2) と同様に考えると ${}_2\mathrm{C}_1 \cdot 2! \times 7!$ 通りである.

(b) のとき，まず，1，2，8，9 以外の 5 枚の中から 8 と 9 の間に入る 1 枚を選んで 8 と 9 と間のカードの 3 枚によるセットをつくる．このセットを 1 枚のカードと考えて，1，2 以外の 4 枚と合わせた 5 枚を一列に並べ，次に，カードとカードの間および両端の 6ヶ所のうちの 2ヶ所に 1，2 のカードを 1 枚ずつ入れ

ることで (b) の並べ方が得られる．これは ${}_5\mathrm{C}_1 \cdot 2! \cdot 5! \times 6 \cdot 5$ 通りである．

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{2 \cdot 2! \times 7! + 5 \cdot 2! \cdot 5! \times 6 \cdot 5}{9!} \\
=&\frac{2 \cdot 2 \cdot 7 + 5 \cdot 2 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{14 + 25}{9 \cdot 4 \cdot 7} \\
=&\frac{13}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \mathbf{\frac{13}{84}}
\end{aligned}$$

……(答)

- 求める確率は $P(A \cap B)$ であり，

  $$P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B)$$

  $P(\overline{A} \cap B)$ は，番号 1 のカードと番号 2 のカードが隣り合い，かつ，番号 8 のカードと番号 9 のカードの間にはちょうど 1 枚のカードがある場合の確率である．

  そのような並べ方は，8 と 9 の間のカード 1 枚を 1，2，8，9 以外の 5 枚のカードの中から選び，1 と 2 のセットおよび 8 と 9 と間のカードの 3 枚によるセットをそれぞれ 1 枚のカードとして他の 4 枚と並べることにより得られる．2 つのセット内の順番を考えると

  $2! \times {}_5\mathrm{C}_1 \cdot 2! \times 6!$ 通り

  ある．したがって

  $$P(\overline{A} \cap B) = \frac{2 \times 5 \cdot 2 \times 6!}{9!} = \frac{5}{9 \cdot 2 \cdot 7}$$

  よって，

  $$\begin{aligned}
  P(A \cap B) &= \frac{7}{36} - \frac{5}{9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{49 - 10}{9 \cdot 4 \cdot 7} \\
  &= \frac{39}{9 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{13}{84}
  \end{aligned}$$

← (1)，(2) の利用を考える．

← $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$ でもあるが，$P(A \cap \overline{B})$は場合分けが多いのでこちらは避ける．