

6 個のさいころを同時に投げるとき, ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ.

(13 東京工大 1(2))

$\frac{325}{648}$

648

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

4種類の目が出る状況をつかむことが大切です. 4種類の目を a, b, c, d とすると

$$\{a, a, a, b, c, d\} \quad \{a, a, b, b, c, d\}$$

の2つのタイプがあります.

あとはどの目がどのさいころで出るか落ちていて数えましょう.

【解答】

6個のさいころの目の出方は 6^6 通りあり, これらの起こり方は同様に確からしい.

4種類の目を a, b, c, d とすると, 6個のさいころの目の出方は

$$(i) \{a, a, a, b, c, d\} \quad (ii) \{a, a, b, b, c, d\}$$

の2つのタイプがある.

(i)のタイプについて;

a となる目の決め方は 6C_1 通り, b, c, d となる目の決め方は ${}_5C_3$ 通りある. どのさいころが4種類の目のどの目となるかを考えると, このタイプのさいころの目の出方は

$${}^6C_1 \cdot {}_5C_3 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} = 6 \cdot 10 \times 120 = 6^2 \cdot 200 \text{ (通り)}$$

- a となる目とさいころの決め方は

$${}^6C_1 \cdot {}^6C_3 = 6 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 6 \cdot 20 \text{ 通り}$$

残り3個のさいころの目の決め方は

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \text{ 通り}$$

あるから

$$6 \cdot 20 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 6^2 \cdot 200 \text{ (通り)}$$

(ii)のタイプについて; a, b となる目の決め方は 6C_2 通り, c, d となる目の決め方は ${}_4C_2$ 通りある. どのさいころが4種類の目のどの目となるかを考えると, このタイプのさいころの目の出方は

$${}^6C_2 \cdot {}_4C_2 \times \frac{6!}{2!2!1!1!} = 15 \cdot 6 \times 180 = 6^2 \cdot 450 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{6^2 \cdot 200 + 6^2 \cdot 450}{6^6} = \frac{650}{6^4} = \frac{325}{648} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

- a, b となる目とさいころの決め方は

$${}^6C_2 \cdot {}^6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \text{ 通り}$$

残り2個のさいころの目の決め方は

$$4 \cdot 3 \text{ 通り}$$

あるから

$$2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \times 4 \cdot 3 = 6^2 \cdot 450 \text{ (通り)}$$

← 目 $\{a, b, c, d\}$ が決まった後は, $\{a, a, a, b, c, d\}$ の6個を並べて, その順に番号1~6がついた6個のさいころの目とすればよい.