A，B，C，D の 4 人が自分の名前を書いたカードを 1 枚ずつ持っている．これらのカードを一度集めてから 1 枚ずつ全員に無作為に配るとする．

(1) A または B が自分の名前のカードを受け取る確率を求めよ．
(2) 全員が自分の名前のカードを受け取らない確率を求めよ．

(1) $\dfrac{5}{12}$

(2) $\dfrac{3}{8}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

4 人のカードの受け取り方は $4! = 24$ 通りです．この程度ならすべてを書き出すこともできます．しかし，5 人になると $5! = 120$ 通り，6 人，7 人，$\cdots$ となると大変です．人数が増えたときも通用する解法も考えておきたいものです．

【解答】

(1) A，B，C，D 4 人のカードの受け取り方は $4!$ 通りあり，これらの起こり方は同様に確からしい．

←― 同様に確からしい

A，B，C，D の名前を書いたカードをそれぞれ a, b, c, d とする．4 人がカードを受け取るとき，X が自分の名前のカード x を受け取る場合の数を $n(X)$ とおくと，X 以外の人は x 以外のカードを受け取るから $n(X) = 3!$ である．A または B が自分の名前のカードを受け取る場合の数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 3! + 3! - 2! = 10 \end{aligned}$$

←― 加法定理

求める確率は，

$$\frac{10}{4!} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$ ……(答)

(2) 条件を満たすカードの受け取り方は，右の樹形図より 9 通りある．

←― 樹形図

求める確率は，

$$\frac{9}{4!} = \mathbf{\frac{3}{8}}$$ ……(答)

A　B　C　D
b ＜ a — d — c
　　c — d — a
　　d — a — c
c ＜ a — d — b
　　d ＜ a — b
　　　　b — a
d ＜ a — b — c
　　c ＜ a — b
　　　　b — a

- 次のように数えてもよい．

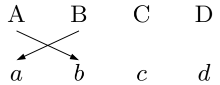
  A が受け取るカードは b, c, d の 3 通りがある．ここで，A がカード b を受け取ったとする．これを $f(\mathrm{A}) = b$ と表す．次に，B が受け取るカード $f(\mathrm{B})$ を

  $$f(\mathrm{B}) = a, \quad f(\mathrm{B}) \neq a$$

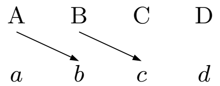
  と場合分けして調べる．

  ←― この場合分けはカードの枚数が増えたときも有効である．

  (i) $f(\mathrm{B}) = a$ のとき
  残り C，D のカードの受け取り方は 1 通りである．



  (ii) $f(\mathrm{B}) \neq a$ のとき
  B が受け取るカードは c, d の 2 通りがある．ここで，B がカード c を受け取ったとすると，残り C，D のカードの受け取り方は 1 通りである．



  (i)，(ii) より，条件を満たすカードの受け取り方は

  $$3 \cdot (1 + 2) = 9 \text{ (通り)}$$

  である．

- 一般化しておこう．n 人 $(n \geqq 3)$ 全員が自分の名前のカードを受け取らない場合の数を $D(n)$ とすると

  $$D(n) = (n-1)\{D(n-2) + D(n-1)\}$$

  である．