n 人でじゃんけんを 1 回する．ただし，どの人もグー，チョキ，パーを出す確率は等しくそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ とする．また,「あいこ」とはじゃんけんで勝者が 1 人もいない状態のこととする．このとき次の問に答えよ．

(1) $n=3$ のとき,「あいこ」となる確率を求めよ．
(2) $n=4$ のとき，勝者が 1 人である確率および勝者が 2 人である確率をそれぞれ求めよ．
(3) $n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ のとき「あいこ」となる確率を n を用いて表せ．

(13 東京海洋大 海洋科学 3)

(1) $\dfrac{1}{3}$
(2) $\dfrac{4}{27},\ \dfrac{2}{9}$
(3) $\dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

じゃんけんの問題で，勝者の人数が与えられたときの場合の数は,「誰」が「どの手」で勝つか，とを考えて数えるとよいでしょう．

単純に「勝者が出る」または「あいこ」になるというとき場合の数は，じゃんけんの手の種類に着目するとよいでしょう．すなわち，勝者が出るのは 2 種類の手が出たときで,「あいこ」になるのは 1 種類または 3 種類の手が出たときです．

【解答】

(1) 3 人でじゃんけんをするとき,「あいこ」になるのは

(i) 3 種類の手が出る場合　$3! = 6$ (通り)

(ii) 1 種類の手が出る場合　3 (通り)

のいずれかである．求める確率は

$$\frac{6+3}{3^3} = \mathbf{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots(答)$$

← チェクリピ 299

← (ii) は 3 人とも同じ手を出すということ．

(2) 4 人でじゃんけんをするとき，勝者が 1 人となるのは,「誰」が「どの手」で勝つかと考えると，求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^4} = \mathbf{\frac{4}{27}} \quad \cdots\cdots(答)$$

← 「どの 1 人」が「どの手」で

勝者が 2 人となる場合も同様にして

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^4} = \mathbf{\frac{2}{9}} \quad \cdots\cdots(答)$$

← 「どの 2 人」が「どの手」で

(3) 「あいこ」になるのは，1 種類または 3 種類の手が出るときであり，これの余事象を考える．余事象は，2 種類の手が出た場合 (勝者が決まるとき) である．2 種類の手の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りであり，n 人はそれぞれ 2 通りの手の出し方がある．ただし，全員が同じ手を出すと「あいこ」となる (2 通り) からこれらは除く．求める確率は

← 3 種類の手の出方が複雑である．場合分けが多くなるときには余事象を考えてみる．

$$\begin{aligned} &1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot (2^n - 2)}{3^n} \\ =&1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ =&\mathbf{\frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}} \quad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

- (1) は (3) の $n = 3$ のときの確率である．(3) と同じく余事象を考えると

$$1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2 \cdot (2^3 - 2)}{3^3} = 1 - \frac{8-2}{3^2} = \frac{1}{3}$$

- (3) の余事象を (2) のように考えるなら，n 人のじゃんけんで勝者が決まる確率は

$$\begin{aligned} &\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^n} + \frac{{}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^n} + \cdots + \frac{{}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^n} \\ =&\frac{{}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}}{3^{n-1}} \\ =&\frac{(1+1)^n - {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_n}{3^{n-1}} \quad (\because\ 二項定理) \\ =&\frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

← 「誰」が「どの手」で勝つか

← 二項係数の和は二項定理を利用する．