袋の中に 1, 2, 3, 4, 5 の番号が 1 つずつ書かれた 5 つの玉が入っている．この中から無作為に 1 個の玉を取り出し，玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う．その操作を繰り返し，記録された数字の和が 3 の倍数になった時点で終了する．ただし，1 回目で 3 の倍数が出た場合は，その時点で終了とする．n 回目の操作で終了する確率を p_n とする．

(1) p_1, p_2 を求めよ．
(2) $n \geqq 3$ のとき，p_n を n の式で表せ．

(13 東北大 後期 理 4 経 3)

(1) $p_1 = \dfrac{1}{5}$, $p_2 = \dfrac{8}{25}$
(2) $p_n = \dfrac{8}{25}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-2}$ $(n \geqq 3)$

【チェック・チェック】

(1) は (2) の準備です．

n 回目で操作が終了するということは，n 回までに記録された数字の和が n 回目で始めて 3 の倍数となるということです．すなわち，

1 回目の数字は 3 の倍数でない．
2 回目までの数字の和は 3 の倍数でない．
3 回目までの数字の和は 3 の倍数でない．
$\cdots$
$n-1$ 回目までの数字の和は 3 の倍数でない．
n 回目までの数字の和は 3 の倍数である．

この状況を式で表しましょう．

【解答】

k 回目の操作で記録される数字を X_k とし，n 回目までに記録された数字の和を S_n とする．

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

(1) 1 回目の操作で終了するのは，$X_1 = 3$ のときであるから

$$p_1 = \mathbf{\frac{1}{5}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

←― これは問題ないでしょう．

2 回目の操作で終了するのは，

「$S_1 \fallingdotseq 3$ かつ $S_2 = (3\text{ の倍数}) = 3,\ 6,\ 9$」

←― $S_1 \fallingdotseq 3$ であることを忘れない．

のときである．1，2，3，4，5 を 3 で割った余りで分類し，

$R_1 =$「1 または 4」，$R_2 =$「2 または 5」，$R_3 =$「3」

とすると，条件を満たすのは

$(X_1,\ X_2) = (R_1,\ R_2)$ または $(R_2,\ R_1)$

のときである．

$$p_2 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \mathbf{\frac{8}{25}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) S_n を 3 で割った余りを $\equiv r$ $(r = 0,\ 1,\ 2)$ で表すことにする．
$n \geqq 3$ のとき n 回目の操作で終了するのは，

←― 3 で割った余りが問題の中心なので，合同式の記号「$\equiv$」を用いる．

「$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_{n-1} \not\equiv 0$ かつ $S_n \equiv 0$」

のときである．

$S_1 \not\equiv 0$ である確率は　$1 - p_1 = \dfrac{4}{5}$　←― 1 回目

$S_{k-1} \not\equiv 0$ のとき $S_k \not\equiv 0$ $(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ となるのは　←― 2 回目〜 $n-1$ 回目

(i) $S_{k-1} \equiv 1$ のとき，$X_k =$「R_1 または R_3」のときであり，この確率は　$\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$

(ii) $S_{k-1} \equiv 2$ のとき，$X_k =$「R_2 または R_3」のときであり，この確率は　$\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$

いずれのときも $\dfrac{3}{5}$ である．

また，$S_{n-1} \not\equiv 0$ のとき $S_n \equiv 0$ となる確率は

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

← n 回目

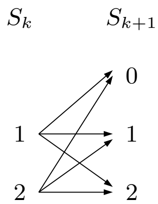
以上より，求める確率は

$$\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{8}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}} \ (n \geqq 3) \qquad \cdots\cdots(答)$$

← これは $n=2$ のときも成り立つ．

- 漸化式の利用を考える．
  $S_k \equiv 1$ である確率を q_k，$S_k \equiv 2$ である確率を r_k とすると

← 確率と漸化式
チェクリピ



$$p_{k+1} = \frac{2}{5}q_k + \frac{2}{5}r_k \qquad \cdots\cdots ①$$

$$q_{k+1} = \frac{1}{5}q_k + \frac{2}{5}r_k \qquad \cdots\cdots ②$$

$$r_{k+1} = \frac{2}{5}q_k + \frac{1}{5}r_k \qquad \cdots\cdots ③$$

② + ③ より

$$q_{k+1} + r_{k+1} = \frac{3}{5}(q_k + r_k)$$

← ②±③ として，2 種類の等比数列をつくり $\{q_n\}$，$\{r_n\}$ の一般項を求めることもできるが，①を用いることをめざしているので
$a_n + b_n$
が分かればよい．

数列 $\{q_k + r_k\}$ は等比数列で $q_1 = r_1 = \dfrac{2}{5}$ だから

$$q_{n-1} + r_{n-1} = (q_1 + r_1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$

①より

$$p_n = \frac{2}{5}(q_{n-1} + r_{n-1}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{8}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$