投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ．

(13 京都大 文 5)

(1) $\dfrac{1}{2}$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

【チェック・チェック】

1 回の硬貨投げによる移動の様子をつかむことから出発しましょう.

(2) は 2 回の硬貨投げを 1 つの操作と考えると，(1) の延長上にある問題となります.

【解答】

(1) 石が座標 x の点にあるとき，1 回硬貨を投げたときの石の座標は

表のとき，$x \longrightarrow -x$

裏のとき，$x \longrightarrow y$ とすると $\dfrac{x+y}{2}=1$ より $y=2-x$

である．したがって，2 回硬貨を投げたときの座標は

表表のとき，$x \longrightarrow -x \longrightarrow -(-x)=x$

表裏のとき，$x \longrightarrow -x \longrightarrow 2-(-x)=x+2$

裏表のとき，$x \longrightarrow 2-x \longrightarrow -(2-x)=x-2$

裏裏のとき，$x \longrightarrow 2-x \longrightarrow 2-(2-x)=x$

である.

よって，2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にあるのは，硬貨が「表裏」または「裏表」と出るときであり，この確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 石が原点にあるとき，2 回硬貨を投げるときの移動量は (1) より

$$0 \cdots\cdots ①,\quad 2 \cdots\cdots ②,\quad -2 \cdots\cdots ③$$

のいずれかであり，この確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}$$

である．$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にあるのは，②が n 回起こるときであるから，求める確率は

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- ①が a 回，②が b 回，③が c 回起こったとすると，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にあるのは

$$\begin{cases} 0\cdot a+2\cdot b-2\cdot c=2n \\ a+b+c=n \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} b-c=n \\ a+b+c=n \end{cases}$$

2 式の差をとると　$a+2c=0$

$a \geqq 0,\ c \geqq 0$ より　$a=c=0$　$\therefore\ b=n$

←― 1 回の硬貨投げによる移動の様子をつかむ.

←― 2 回の硬貨投げによる移動の様子をつかむ.

←― 題意を満たす移動をつかむ.

←― (1) がヒントになっている.

←― 移動の様子をキチンとつかむにはこの連立方程式を解けばよい.