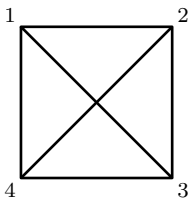
右図の 1 で示される頂点に石を一つ置く．さいころを 1 回投げるたびに，次の規則 (Ⅰ)，(Ⅱ)，(III) にしたがって石を動かす．



(Ⅰ) 出た目が 1 または 2 の場合，太線に沿って時計回りに隣の頂点へ動かす．

(Ⅱ) 出た目が 3 または 4 の場合，太線に沿って反時計回りに隣の頂点へ動かす．

(III) 出た目が 5 または 6 の場合，対角線に沿って向かいの頂点へ動かす．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

(1) さいころを 2 回投げたとき，石が 1 で示される頂点に戻る確率 p_1 を求めよ．
(2) さいころを 3 回投げたとき，石が 1 で示される頂点に戻る確率 p_2 を求めよ．
(3) さいころを 4 回投げたとき，石が 1 で示される頂点に戻る確率 p_3 を求めよ．

(13 広島大 後期 総合科学 (理系) 1)

(1) $\dfrac{1}{3}$
(2) $\dfrac{2}{9}$
(3) $\dfrac{7}{27}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

石が 1 で示される頂点に戻るのは，最後石が 1 以外の頂点にあって，確率 $\dfrac{1}{3}$ で頂点 1 に戻るときです．

また，設問にはなっていませんが，一般化するところまで考えておきましょう．

【解答】

さいころを 1 回投げたとき，規則 (I)，(II)，(III) にしたがう確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である．

(1) さいころを 2 回投げたとき，石が 1 で示される頂点に戻るのは

$$1 \to 2 \to 1,\ 1 \to 3 \to 1,\ 1 \to 4 \to 1$$

となるときで，これらは互いに排反だから

$$p_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 排反だから，各事象の確率を加える．

- さいころを 1 回投げたとき，石は頂点 2，3，4 のいずれか (すなわち，1 以外の頂点) にあり，どの頂点からも石が 1 で示される頂点に戻る確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから

$$p_1 = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

⟵ 1 回後，石はどの頂点にあってもよい．

(2) さいころを 2 回投げたとき，石が 1 以外の頂点にある確率は $1-p_1$ である．このとき，3 回目に石が 1 で示される頂点に戻る確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから

$$p_2 = (1-p_1)\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) さいころを 3 回投げたとき，石が 1 以外の頂点にある確率は $1-p_2$ である．このとき，4 回目に石が 1 で示される頂点に戻る確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから

$$p_3 = (1-p_2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{7}{27}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- (2)，(3) と同じに考えると，さいころを $n+1$ 回投げたとき，石が 1 で示される頂点に戻る確率 p_n は，次の漸化式を満たす．

$$p_1 = \frac{1}{3},\ p_{n+1} = (1-p_n)\cdot\frac{1}{3}$$

⟵ (2)，(3) の一般化．

この漸化式は

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

⟵ $\alpha = -\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}$ より，$\alpha = \dfrac{1}{4}$

と変形されるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad p_n = \frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$