数直線上を動く点 P が原点の位置にある．赤玉が 2 個と白玉が 1 個入った袋から玉を 1 個取り出して，色を確認してから玉を袋に戻し，取り出した玉が赤玉だったら P を正の向きに 3 だけ進め，白玉だったら P を負の向きに 2 だけ進める．この操作を 5 回繰り返す．このとき，点 P の座標が 15 になる確率は $\boxed{ケ}$ である．また，点 P の座標が $\boxed{コ}$ になる確率がもっとも高く，その確率は $\boxed{サ}$ である．

(13 明治学院大 全学部 2 月 1 日 1(3))

ケ	コ	サ
$\dfrac{32}{243}$	5 または 10	$\dfrac{80}{243}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

5 回の反復試行の問題です．確率 p_a の最大値を求めるには，p_a の増減を調べましょう．$p_a > 0$ より

$$p_a < p_{a+1} \iff \frac{p_{a+1}}{p_a} > 1$$

です．$p_{a+1} - p_a$ の正負を調べてもよいのですが，約分ができる比の方が式処理し易いでしょう．

【解答】

1 回の操作において，+3 の移動は確率 $\dfrac{2}{3}$ で起こり，-2 の移動は確率 $\dfrac{1}{3}$ で起こる．

5 回の操作後，点 P の座標が 15 になるのは，+3 の移動を 5 回行うときであるから，この確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \underset{ケ}{\boxed{\mathbf{\frac{32}{243}}}}$$

$\longleftarrow (+3) \times 5 = +15$

また，5 回の操作において，+3 の移動が a 回，かつ，-2 の移動が $b\ (= 5 - a)$ 回起こる確率を p_a とすると

$$p_a = {}_5\mathrm{C}_a \left(\frac{2}{3}\right)^a \left(\frac{1}{3}\right)^b = \frac{{}_5\mathrm{C}_a \cdot 2^a}{3^5}$$

$\longleftarrow$ 反復試行の確率

であるから

$$\begin{aligned}\frac{p_{a+1}}{p_a} &= \frac{{}_5\mathrm{C}_{a+1} \cdot 2}{{}_5\mathrm{C}_a} \\ &= \frac{5!}{(4-a)!(a+1)!} \cdot \frac{(5-a)!a!}{5!} \cdot 2 \\ &= \frac{2(5-a)}{a+1}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$ 比を用いて，$\{p_a\}(> 0)$ の増減を調べる．

$$p_a < p_{a+1} \iff \frac{p_{a+1}}{p_a} > 1$$

$p_a > 0$ より

$$\begin{aligned}p_{a+1} > p_a &\iff \frac{2(5-a)}{a+1} > 1 \\ &\iff 10 - 2a > a + 1 \\ &\iff a < 3\end{aligned}$$

したがって，

$$p_1 < p_1 < p_2 < p_3 = p_4,\ p_4 > p_5$$

であり，p_a が最大になるのは，$a = 3$ または 4 のときである．

$\longleftarrow$ $n = 3$ だけでなく，$n = 4$ のときも最大となる．

5 回の操作において，+3 の移動が a 回，-2 の移動が b 回起こるときの点 P の座標は

$$3a - 2b = 3a - 2(5-a) = 5a - 10$$

であるから，点 P の座標が $\underset{コ}{\boxed{\textbf{5 または 10}}}$ になる確率がもっとも高く，その確率は

$\longleftarrow 5 \cdot 3 - 10 = 5,$ $5 \cdot 4 - 10 = 10$

$$p_3 = p_4 = \frac{{}_5\mathrm{C}_4 \cdot 2^4}{3^5} = \underset{サ}{\boxed{\mathbf{\frac{80}{243}}}}$$