$f(x) = 4x^2 + 2x + 4$, $g(x) = x^2 - x + 1$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての実数 x に対して $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} < \log_a(2a+1)$$

がすべての実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ．ただし $a > 0$, $a \neq 1$ とする．

(13 大阪市大 文系 2)

【答】

(1) 略

(2) $0 < a < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{9}{2} < a$

【チェック・チェック】

(1) より $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$，$a > 0$ より $2a+1>0$ であるから，(2) のおける対数の真数条件が保証されています.

(2) では対数をはずして真数についての不等式に変形します．このときの a による場合分けができるかどうかがこの問題のポイントです．分母を払うときにも $g(x)>0$ は効いてきます.

【解答】

(1)
$$f(x) = 4x^2+2x+4 = 4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0,$$
$$g(x) = x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$
であり，すべての実数 x に対して $f(x)>0$，$g(x)>0$ が成り立つ.
……(証明終わり)

⟵ 平方完成して (最小値) > 0 を示した.

(2)
$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} < \log_a(2a+1) \qquad \cdots\cdots (*)$$

⟵ 底 a と 1 との大小で場合分けして，対数をはずす.

(i) $a>1$ のとき
$$(*) \iff \frac{f(x)}{g(x)} < 2a+1$$
$$\iff (2a+1)g(x) - f(x) > 0 \qquad (\because\ g(x)>0)$$

⟵ $a>1$ のとき $\log_a A < \log_a B \iff (0<)A<B$

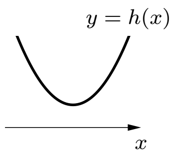
$h(x) = (2a+1)g(x) - f(x)$ とおくと
$$h(x) = (2a+1)(x^2-x+1) - (4x^2+2x+4)$$
$$= (2a-3)x^2 - (2a+3)x + 2a - 3$$

(ア) $2a-3=0$ $\left(a=\dfrac{3}{2}\right)$ のとき
$$h(x) = -6x$$
であり，$x>0$ のとき $h(x)<0$ であるから，不適.

⟵ $h(x)$ が 2 次式であるかないかの場合分けをしている.

(イ) $2a-3 \fallingdotseq 0$ $\left(a \fallingdotseq \dfrac{3}{2}\right)$ のとき

2 次方程式 $h(x)=0$ の判別式を D とおくと，すべての実数 x に対して $h(x)>0$ が成り立つ条件は
$$\begin{cases} 2a-3>0 \\ D<0 \end{cases}$$

⟵ 

ここで，
$$D = (2a+3)^2 - 4(2a-3)^2$$
$$= (6a-3)(9-2a)$$
であり，
$$\begin{cases} a > \dfrac{3}{2} \\ a < \dfrac{1}{2} \text{ または } \dfrac{9}{2} < a \end{cases} \qquad \therefore\ \frac{9}{2} < a$$

　(ア)，(イ) より，　$\dfrac{9}{2} < a$

これは $a > 1$ を満たす.

(ii) $0 < a < 1$ のとき

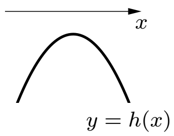
$\longleftarrow$ $0 < a < 1$ のとき $\log_a A < \log_a B \iff A > B (> 0)$

$$(*) \iff \frac{f(x)}{g(x)} > 2a + 1 \iff h(x) < 0$$

$2a - 3 < 0$ より，すべての実数 x に対して $h(x) < 0$ が成り立つ条件は

$$D < 0 \qquad \therefore \quad a < \frac{1}{2} \text{ または } \frac{9}{2} < a$$

$\longleftarrow$



$0 < a < 1$ とあわせると　$0 < a < \dfrac{1}{2}$

以上 (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{0 < a < \frac{1}{2},\ \frac{9}{2} < a}$$ ……(答)