方程式

$$2\log_2|x-4|+\log_2(x+8)=a$$

を考える．a は定数である．このとき、次の問に答えなさい．

(1) この方程式が解 $x=0$ をもつとき $a=\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $a=3+\log_2 5$ のとき，この方程式の解 x は

$$x=\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\pm\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である．

(3) この方程式の解 x の個数がちょうど 2 個となるとき a の値は $a=\boxed{\text{キ}}$ である．また，このときの解 x は $x=\boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}}$ である．また $a=5\log_2 3$ のとき，この方程式の解 x の個数はちょうど$\boxed{\text{サ}}$個である．

(13 東北薬大 1)

【答】

ア	イ	ウエ	オ	カ	キ	クケ	コ	サ
7	2	-1	3	5	8	-4	8	3

【チェック・チェック】

対数 $\log_p x$ が与えられたら，まず対数が定義されるための条件，すなわち

$$\text{底条件}: p > 0 \text{ かつ } p \neq 1, \quad \text{真数条件}: x > 0$$

をおさえる習慣をつけておきましょう．

(3) で微分が使われますが，増減表をかくとき x の動く範囲が意味をもってきます．

【解答】

$f(x) = 2\log_2|x-4| + \log_2(x+8)$ とおく．

$$f(x) = \log_2(x-4)^2(x+8) \quad (x > -8 \text{ かつ } x \neq 4 \cdots\cdots ①)$$

⟵ 真数条件 ① を忘れない．

(1) $x = 0$ が方程式 $f(x) = a$ の解であるから

$$a = f(0) = \log_2\left((-4)^2 \cdot 8\right) = \log_2 2^{2\cdot2+3} = \mathbf{7} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ $(a^m)^n \cdot a^l = a^{mn+l}$

(2) $a = 3 + \log_2 5 = \log_2\left(2^3 \cdot 5\right)$ より，方程式 $f(x) = a$ の解は

$$(x-4)^2(x+8) = 2^3 \cdot 5$$

$$x^3 - 48x + 88 = 0$$

$$(x-2)(x^2+2x-44) = 0$$

⟵ 因数定理

$$\therefore \quad x = 2,\ -1 \pm 3\sqrt{5}$$

これらは，① を満たすから，求める解は

⟵ ①の確認を忘れない．

$$\boldsymbol{x = 2,\ -1 \pm 3\sqrt{5}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $g(x) = (x-4)^2(x+8)$ とおく．

$$g(x) = x^3 - 48x + 128$$

$$g'(x) = 3x^2 - 48 = 3(x+4)(x-4)$$

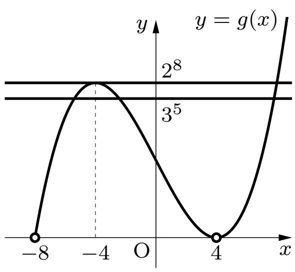
① の範囲での増減表は下表となる．

⟵ 定義域はつねに注意する．

x	(-8)	$\cdots$	-4	$\cdots$	(4)	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	(0)	↗		↘	(0)	↗

$$\text{極大値}: g(-4) = (-8)^2 \cdot 4 = 2^{3\cdot2+2} = 2^8$$

より，① の範囲での $y = g(x)$ のグラフは右のようになる．方程式 $f(x) = a$ の解の個数がちょうど 2 個となる a の値は



$$\log_2 g(-4) = a$$

$$\therefore \quad a = \log_2 2^8$$

$$= \mathbf{8} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ $g(x) = 2^a$

$\iff a = \log_2 g(x)$

$\iff a = f(x)$

また，このときの解 x は

$$x^3-48x+128=2^8$$
$$x^3-48x-128=0$$
$$(x+4)^2(x-8)=0$$

← $x=-4$ が重解となるのはグラフから自明.

より $\boldsymbol{x=-4,\ 8}$ である. ……(答)

また，$a=5\log_2 3=\log_2 3^5$ のとき，方程式 $f(x)=a$ は

$$g(x)=3^5$$

← $f(x)=a \iff g(x)=2^a$

$0<3^5<2^8$ より，解 x の個数はちょうど **3** 個である.

……(答)