$\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = 5$, $0 < \alpha$, $\beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ 上で関数

$$f(x) = \sin(\alpha+\beta+x) + \cos(\alpha+\beta+x)$$

を考える．

(1) $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ を求めよ．
(2) $\tan(\alpha+\beta+x)$ の値の範囲を求めよ．
(3) $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ．
(4) $f(x)$ が最小となるときの x を γ とする．$\alpha+\beta+\gamma$, $\tan\gamma$ を求め，$\beta-\alpha > \gamma-\beta$ となることを示せ．
(5) $\beta > \dfrac{5\pi}{12}$ となることを示せ．

(13 お茶の水女大 理・文教育・生活科学 1)

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{7}{\sqrt{130}}$, $\cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{9}{\sqrt{130}}$
(2) $-\dfrac{7}{9} \leqq \tan(\alpha+\beta+x) \leqq \dfrac{9}{7}$
(3) 最大値 $-\dfrac{2}{\sqrt{130}}$ ，最小値 $-\sqrt{2}$
(4) $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{5}{4}\pi$, $\tan\gamma = 8$, 証明は略
(5) 略

【チェック・チェック】

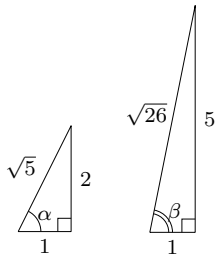
加法定理の総合問題です．関数値の大小と角の大小の関係をキチンと説明する論証力が求められています．

設問が 5 個もあり長丁場ですが，それぞれが次の設問のヒントにもなっています．(3) を乗り切れば一山越えた感じですね．

【解答】

(1) $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$ かつ
$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{26}},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{26}}$$



であるから

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{\sqrt{130}}}\end{aligned}$$ ……(答)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} \\ &= \boldsymbol{-\frac{9}{\sqrt{130}}}\end{aligned}$$ ……(答)

← sin，cos の加法定理を考える，あるいは $\tan\alpha, \tan\beta$ の値が与えられているので，$\tan(\alpha+\beta)$ をまず求める，といったように道は 2 つあるでしょう．
チェクリピ 加法定理

- $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$ より $\tan(\alpha+\beta)$ の値を求める．

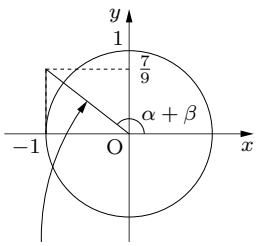
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+5}{1-2\cdot 5} = -\frac{7}{9}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より
$0 < \alpha+\beta < \pi$ であり，
$\tan(\alpha+\beta) < 0$ とあわせると

$$\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$$

である．したがって，

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{7}{\sqrt{130}},$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$



$\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{9}$

← $\alpha+\beta$ は第 2 象限にあるから
$\sin(\alpha+\beta) > 0$，
$\cos(\alpha+\beta) < 0$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\alpha+\beta \leqq \alpha+\beta+x \leqq \alpha+\beta+\frac{\pi}{2}$$

であり，$\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$ より

$$\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta+x < \frac{3}{2}\pi$$

この区間で $\tan\theta$ は単調増加であるから

$$\tan(\alpha+\beta) \leqq \tan(\alpha+\beta+x) \leqq \tan\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)$$

← この一言を忘れない !!

(1) より

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = -\frac{7}{9}$$

$$\tan\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \frac{9}{7}$$

よって，$\tan(\alpha+\beta+x)$ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{7}{9} \leqq \tan(\alpha+\beta+x) \leqq \frac{9}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) 合成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\alpha+\beta+x)+\cos(\alpha+\beta+x) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\alpha+\beta+x+\dfrac{\pi}{4}$ のとり得る値の範囲は

$$\alpha+\beta+\frac{\pi}{4} \leqq \alpha+\beta+x+\frac{\pi}{4} \leqq \alpha+\beta+\frac{3}{4}\pi$$

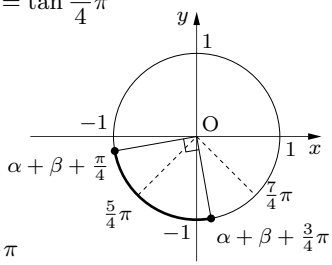
ここで，(2) より

$$\tan(\alpha+\beta) = -\frac{7}{9} > -1 = \tan\frac{3}{4}\pi$$

より

$$\frac{3}{4}\pi < \alpha+\beta < \pi$$

← $\alpha+\beta$ の範囲を狭めた.



より

$$\pi < \alpha+\beta+\frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi < \alpha+\beta+\frac{3}{4}\pi < \frac{7}{4}\pi$$

したがって，$f(x)$ は $\alpha+\beta+x+\dfrac{\pi}{4} = \alpha+\beta+\dfrac{\pi}{4}$ のとき，すなわち $x=0$ のとき

$$\begin{aligned} \text{最大値}: f(0) &= \sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta) \\ &= \frac{7}{\sqrt{130}} - \frac{9}{\sqrt{130}} = \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{130}}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

をとり，$\alpha+\beta+x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，すなわち $x = \dfrac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)$ のとき

← 最小となるのは端点ではない.

$$\begin{aligned} \text{最小値}: f\left(\frac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)\right) &= \sqrt{2}\sin\frac{3}{2}\pi \\ &= \boldsymbol{-\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

をとる.

(4) (3) より $\gamma = \dfrac{5}{4}\pi-(\alpha+\beta)$ したがって

$$\alpha+\beta+\gamma = \boldsymbol{\frac{5}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また

$$\tan\gamma = \tan\left(\frac{5}{4}\pi - (\alpha+\beta)\right) = \frac{\tan\frac{5}{4}\pi - \tan(\alpha+\beta)}{1+\tan\frac{5}{4}\pi\cdot\tan(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{7}{9}\right)}{1+1\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)} = \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

さらに $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$ であり, $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan x$ は単調に増加するから ⟵ この一言を忘れない !!

$$0<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$$

したがって $0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma-\beta<\frac{\pi}{2}$

ここで

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{5-2}{1+5\cdot 2} = \frac{3}{11}$$

$$\tan(\gamma-\beta) = \frac{\tan r_\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta} = \frac{8-5}{1+8\cdot 5} = \frac{3}{41}$$

$$\therefore\quad \tan(\beta-\alpha) > \tan(\gamma-\beta)$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan x$ は単調に増加するから ⟵ この一言を忘れない !!

$$\beta-\alpha > r-\beta \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(5) (4) より

$$\beta-\alpha>\gamma-\beta \qquad \therefore\quad 2\beta>\alpha+\gamma=\frac{5}{4}\pi-\beta$$ ⟵ (4) の利用

$$\therefore\quad \beta>\frac{5\pi}{12} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(別解) $$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ より $5>2+\sqrt{3}$ よって $\tan\beta>\tan\frac{5\pi}{12}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan x$ は単調に増加するから

$$\beta>\frac{5\pi}{12}$$