三角関数の加法定理を用いると

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

を導くことができる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 加法定理と上の公式を利用して，$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ を導け．

(2) $x = \cos\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，(1) より $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ となる．この左辺を因数分解すると $(x-1)(ax^2+bx+c)^2$ となる．整数 a，b，c を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(11 小樽商大 2)

(1) 略

(2) $a = 4$，$b = 2$，$c = -1$

(3) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【チェック・チェック】

加法定理の応用として，$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求める問題です．親切な誘導があるのでこれに乗って手を進めていけば結果に辿り着きます．

2 倍角，3 倍角の公式を問題文に与える必要があるのでしょうか．2 倍角の公式は常識でしょうし，3 倍角の公式は危ないとするなら設問 (1) のなかで導かせてもいいのではないでしょうか．(設問が多くなり，主眼がぼやけてしまうという出題者の配慮なのでしょう．) 数学 II の教科書では 2 倍角の公式の後に「問」として 3 倍角の公式が扱われています．

【解答】

(1) 加法定理より

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos(2\theta+3\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos 3\theta - \sin 2\theta\sin 3\theta\end{aligned}$$

⟵ 2θ，3θ が現れる形に式を展開する．
チェクリピ 3 倍角の公式

ここで，2 倍角の公式，3 倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned}\cos 2\theta\cos 3\theta &= (2\cos^2\theta-1)(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\\ &= 8\cos^5\theta-10\cos^3\theta+3\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta\sin 3\theta &= 2\sin\theta\cos\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\\ &= 2\sin^2\theta\cos\theta(3-4\sin^2\theta)\\ &= 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta(4\cos^2\theta-1)\\ &= -8\cos^5\theta+10\cos^3\theta-2\cos\theta\end{aligned}$$

⟵ $\cos\theta$ のみで表す．

であるから

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= (8\cos^5\theta-10\cos^3\theta+3\cos\theta)\\ &\quad-(-8\cos^5\theta+10\cos^3\theta-2\cos\theta)\\ &= 16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta\quad\cdots\cdots(\text{証明終わり})\end{aligned}$$

(2) $x=\cos\dfrac{2\pi}{5}$，$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，$x=\cos\theta$ であり，$\cos 5\theta=\cos 2\pi=1$ であるから，(1) の等式は

$$1 = 16x^5-20x^3+5x$$

$$\therefore\quad 16x^5-20x^3+5x-1=0\qquad\cdots\cdots(*)$$

となる．$16x^5-20x^3+5x-1$ を $x-1$ で割ると

⟵ 組立除法

1	16	0	−20	0	5	−1	
		16	16	−4	−4	1	
	16	16	−4	−4	1		0

$$\begin{aligned}&16x^5-20x^3+5x-1\\ =&(x-1)(16x^4+16x^3-4x^2-4x+1)\end{aligned}$$

次に

$$16x^4+16x^3-4x^2-4x+1=(ax^2+bx+c)^2$$

⟵ この形になることは問題文に与えられている．

となる $a,\ b,\ c$ を求める．右辺を展開すると

$$
\begin{aligned}
&(ax^2+bx+c)^2\\
=&a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2bcx+2cax^2\\
=&a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2
\end{aligned}
$$

左辺と係数を比較すると

$$
\begin{cases}
a^2=16 & \cdots\cdots ① \\
2ab=16 & \cdots\cdots ② \\
b^2+2ac=-4 & \cdots\cdots ③ \\
2bc=-4 & \cdots\cdots ④ \\
c^2=1 & \cdots\cdots ⑤
\end{cases}
$$

$a>0$ かつ ①，②，④ より

$$a=4,\ b=2,\ c=-1$$

これらは③，⑤も満たし，整数という条件も満たしている．

$\therefore\quad \boldsymbol{a=4,\ b=2,\ c=-1}$ ……(答)

←── ①〜⑤は情報過多である．十分性の確認を忘れないこと．

(3) (2) より $x=\cos\dfrac{2}{5}\pi$ は $(*)$ の解である．さらに，

$x=\cos\dfrac{2}{5}\pi\fallingdotseq 1$ より，$x=\cos\dfrac{2}{5}\pi$ は

$$16x^4+16x^3-4x^2-4x+1=(ax^2+bx+c)^2=0$$

すなわち

$$4x^2+2x-1=0$$

の解である．

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$x=\cos\dfrac{2}{5}\pi>0$ だから

$$x=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$ ……(答)