2 次方程式 $4x^2+2x-1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ とする.

(1) $\alpha=\cos\theta$ となる角 θ が, $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在することを示せ.

以下, θ は (1) で定まるものとする.

(2) $\beta=\cos 2\theta$ であることを示せ.

(3) θ の値を求めよ.

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}$ を求めよ.

(13 東北大 後期 理学部 1)

(1) 略

(2) 略

(3) $\theta=\dfrac{2}{5}\pi$

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

【チェック・チェック】

東北大の講評では

「(1) で一意性に関する吟味のない答案が多かった．(3) で正解に至った答案は殆ど無かった．」

と書かれていました．

(3) では $\cos\theta$，$\cos 3\theta$ が $4x^2+3x-1=0$ の解なので，解と係数の関係を用いると，2 次方程式の話を $\cos\theta$，$\cos 3\theta$ についての連立方程式の話に言いかえることができます．

【解答】

(1) $4x^2+2x-1=0$ を解くと $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

←― 2 次方程式の解の公式

$\alpha>\beta$ より

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$f(x)=\cos x$ は $\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少であり，また

←― θ の一意性をいうためにはこの単調性が大切

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

である．

また，α については $2<\sqrt{5}<3$ より $\dfrac{-1+2}{4}<\alpha<\dfrac{-1+3}{4}$

すなわち $\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ である．これより

$$0<\alpha<\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)<\alpha<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，$f(\theta)=\alpha$ すなわち $\cos\theta=\alpha$ となる θ が $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つだけ存在する． ……(証明終わり)

(2)

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$$

←― 2 倍角の公式

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{4}-1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\beta$$

よって $\quad\cos 2\theta=\beta$ ……(証明終わり)

(3) (1)，(2) より $\cos\theta$，$\cos 2\theta$ は $4x^2+2x-1=0$ の解である．

解と係数の関係から

$$\begin{cases}\cos\theta+\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ① \\ \cos\theta\cos 2\theta=-\dfrac{1}{4} & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

←― $\cos\theta$，$\cos 2\theta$ についての連立方程式

積を和に直す公式を用いて②を変形すると

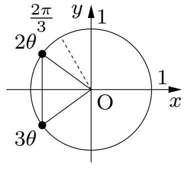
$$\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad\cos 3\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ②'$$

①，②$'$ から

$$\cos 3\theta=\cos 2\theta$$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq 2\theta\leqq\pi$，$\pi\leqq 3\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ であるから，2θ，3θ により決まる



←― 三角方程式を解く(角の比較を考える)

単位円周上の点は x 軸に関して対称である．

$$\frac{2\theta+3\theta}{2}=\pi \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\theta=\frac{2}{5}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $\cos 3\theta-\cos 2\theta=0$ については和を積に直す公式を用いて解くこともできる．

$$\cos 3\theta-\cos 2\theta=-2\sin\frac{5\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$\longleftarrow \cos A-\cos B$
$=-\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{5\pi}{6}\leqq\dfrac{5\theta}{2}\leqq\dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であり，$\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ であるから

$$\sin\frac{5\theta}{2}=0 \qquad \therefore \quad \frac{5\theta}{2}=\pi \qquad \therefore \quad \theta=\frac{2}{5}\pi$$

(4) (3) より

$$\sin\frac{3\theta}{4}=\sin\frac{3\pi}{10}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{10}\right)=-\cos 2\theta=-\beta$$

$\longleftarrow \sin\dfrac{3\pi}{10}$ は既知の角で表現できないから，$\cos\theta$，$\cos 2\theta$ と関連付けしたい．まずは，$\cos$ で表す．

よって $\quad \boldsymbol{\sin\dfrac{3\theta}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$ $\qquad \cdots\cdots(\text{答})$

- $\sin$ を $\cos$ に直すには余角の公式を用いればよい．

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$$

より

$$\sin\alpha=\mp\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$$

である，解答では $\sin\alpha=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ を用いた．$\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ を用いると次のようになる．

$$\begin{aligned}\sin\frac{3\theta}{4}&=\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{5}\\&=\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\ (>0)\\&=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\\&=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\end{aligned}$$