$f(x) = \sqrt{2}\sin x\cos x + \sin x + \cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ とする．

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ．
(2) t の取り得る値の範囲を求めよ．
(3) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

(13 北海道大 文系 1)

【答】

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(3) 最大値 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{4}\right)$；最小値 $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\left(x = \dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi\right)$

【チェック・チェック】

$\sin x$，$\cos x$ の対称式に関する基本問題であり，

「$t = \sin x + \cos x$ とおく」

は定石です．(1)，(2) の誘導が無くても (3) が解けるようになりたいものです．

【解答】

(1) $t = \sin x + \cos x$ より

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \qquad \therefore \quad \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$$

← 積 $\sin x\cos x$ は和 $t = \sin x + \cos x$ で表すことができる．

これより

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2}\sin x\cos x + \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{t^2-1}{2} + t \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

……(答)

(2) $$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

← 合成の公式

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{9}{4}\pi$ …… ① であり

← $x + \frac{\pi}{4}$ の動く範囲をおさえる．

$$-1 \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

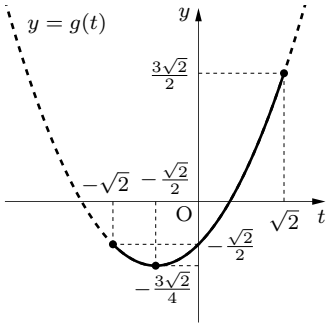
……(答)

(3) $g(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2}$ とおく．

← $f(x)$ の最大値，最小値は，$g(x)$ の最大値，最小値と一致する．

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

← 平方完成し，グラフをかく．



$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の範囲でグラフをかくと右図となる．

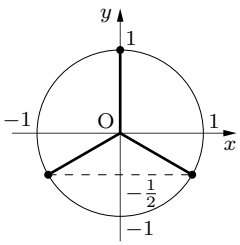
最大値は $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ である．

……(答)

このとき $t = \sqrt{2}$ であり，$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

① より $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$ ……(答)

最小値は $\boldsymbol{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ である． ……(答)



このとき $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり，$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

① より $x + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi}$$

……(答)